Matemātikas komandu sacensības "Baltijas Ceļš 2002"

Latvian version

Tartu, 2002. gada 2. novembris

Risināšanas laiks: 4,5 stundas.
Jautājumus par uzdevumiem var uzdot pirmo 30 minūšu laikā.

1. Atrisiniet vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} a^3 + 3ab^2 + 3ac^2 - 6abc = 1 \\ b^3 + 3ba^2 + 3bc^2 - 6abc = 1 \\ c^3 + 3ca^2 + 3cb^2 - 6abc = 1 \end{cases}$$

reālos skaitļos.

2. Doti tādi reāli skaitļi a, b, c, d, ka

$$a + b + c + d = -2\,,$$
$$ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0\,.$$

Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem a, b, c, d nav lielāks nekā -1.

3. Atrast visas reālu skaitļu virknes $a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$, tādas, ka

$$a_{m^2+n^2} = a_m^2 + a_n^2$$

visiem veseliem skaiļiem $m, n \geqslant 0$.

4. Dots vesels pozitīvs skaitlis n. Pierādiet, ka

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(1-x_i)^2 \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$$

visiem nenegatīviem reāliem skaitļiem $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tādiem, ka $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$.

5. Atrodiet visus tādus pozitīvu racionālu skaitļu pārus (a, b), ka

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}\,.$$

6. Taisnstūrveida galdiņš ar izmēriem $m \times n$, kur $m, n \geqslant 2$, ir sadalīts vienības kvadrātos-laucinos. Uz tā tiek spēlēta sekojoša spēle. Vispirms uz kāda no lauciņiem tiek novietots tornis. Katrā gājienā torni var pārvietot par patvaļīgu skaitu lauciņu vai nu horizontāli, vai vertikāli, ar papildnosacījumu, ka katrs gājiens jāizdara virzienā, kas pagriezts par 90° pulksteņrādītāja virzienā attiecībā pret iepriekšējo gājienu (piemēram, pēc gājiena pa kreisi jāseko gājienam uz augšu, tad pa labi, utt.). Kādām m un n vērtībām ir iespējams, ka tornis apciemo katru galdiņa lauciņu tieši vienu reizi un atgriežas sākotnējā lauciņā? (Apciemots skaitās lauciņš, uz kura tornis nostājas, bet ne tāds, kuram tas pārkāpj pāri.)

7. Plaknē ir novilkti n izliekti četrstūri. Tie sadala plakni apgabalos (viens no apgabaliem ir bezgalīgs). Noteikt lielāko iespējamo šādu apgabalu skaitu.

8. Dota $n \geqslant 3$ plaknes punktu kopa P, tāda, ka nekādi trīs punkti neatrodas uz vienas taisnes. Cik dažādos veidos var izvēlēties C_{n-1}^2 trijstūru, kuru visas virsotnes pieder P, kopu T, tādu, ka katram kopas T trijstūrim ir vismaz viena mala, kura nav neviena cita kopas T trijstūra mala?

9. Divi burvju mākslinieki rāda šādu triku. Pirmais burvju mākslinieks iziet no istabas. Otrais paņem kavu ar 100 kārtīm, kuras apzīmētas ar skaitļiem $1, 2, \ldots, 100$, un lūdz trīs skatītājus pēc kārtas izvēlēties pa vienai kārtij. Otrais burvju mākslinieks redz, kuru kārti katrs skatītājs ir izvēlējies. Tad viņš pievieno vēl vienu kārti no atlikušajām. Skatītāji samaisa šīs 4 kārtis, pasauc pirmo burvju mākslinieku un iedod viņam šīs 4 kārtis. Pirmais burvju mākslinieks paskatās uz 4 kārtīm un "uzmin", kuru kārti bija izvēlējies pirmais skatītājs, kuru otrais un kuru trešais. Pierādīt, ka burvju mākslinieki var veikt šo triku.

10. Dots vesels pozitīvs skaitlis N. Divi pretinieki spēlē šādu spēli. Pirmais uzraksta vairākus, ne obligāti dažādus, veselus pozitīvus skaitļus, kas nepārsniedz 25 un kuru summa ir vismaz 200. Otrais uzvar, ja viņš var izvēlēties starp šiem skaitļiem tādus, kuru summa S apmierina nosacījumu $200-N \leqslant S \leqslant 200+N$. Kāda ir mazākā N vērtība, pie kuras otrajam pretiniekam ir uzvaroša stratēģija?

11. Dots vesels pozitīvs skaitlis n. Plaknē ir atzīmēti n punkti, tādi, ka nekādi trīs no tiem neatrodas uz vienas taisnes un nekādi divi no attālumiem starp tiem nav vienādi. Pēc kārtas, no katra punkta novelkam nogriežņus uz tā diviem tuvākajiem punktiem (ja no šā punkta jau iziet citi nogriežņi, mēs tos nedzēšam). Pierādīt, ka ne no viena punkta nav novilkti nogriežņi uz vairāk nekā 11 punktiem.

12. Plaknē dota četru dažādu punktu kopa S. Zināms, ka katram punktam $X \in S$ atlikušos punktus var tā apzīmēt ar Y, Z un W, ka

$$|XY| = |XZ| + |XW|.$$

Pierādīt, ka visi četri punkti atrodas uz vienas taisnes.

13. Dots šaurleņķa trijstūris ABC, kuram $\angle BAC > \angle BCA$. Uz malas AC ir atzīmēts tāds punkts D, ka $|AB| = |BD|$. Turklāt uz trijstūra ABC apvilktās riņķa līnijas atzīmēts tāds punkts F, ka taisne FD ir perpendikulāra malai BC un punkti F, B atrodas dažādās taisnes AC pusēs. Pierādīt, ka taisne FB ir perpendikulāra malai AC.

14. Uz trijstūra ABC malām AC, AB un BC ir atzīmēti, attiecīgi, punkti L, M un N, tā, ka BL ir leņķa ABC bisektrise un nogriežņi AN, BL un CM krustojas vienā punktā. Pierādīt, ka, ja $\angle ALB = \angle MNB$, tad $\angle LNM = 90^\circ$.

15. Zirneklis un muša sēž uz kuba. Muša vēlas maksimizēt īsāko ceļu līdz zirneklim pa kuba virsmu. Vai visos gadījumos mušai labākā atrašanās vieta ir zirneklim pretējais punkts? ("Pretējais" nozīmē "simetriskais attiecībā pret kuba centru".)

16. Atrast visus tādus veselos nenegatīvos skaitļus m, ka

$$a_m = \left(2^{2m+1}\right)^2 + 1$$

dalās ar ne vairāk kā diviem dažādiem pirmskaitļiem.

17. Pierādīt, ka virkne

$$C_{2002}^{2002},\ C_{2003}^{2002},\ C_{2004}^{2002}, \dots ,$$

pēc moduļa 2002 ir periodiska (bez priekšperioda).

18. Atrast visus tādus veselos skaitļus $n > 1$, ka jebkurš $n^6 - 1$ dalītājs-pirmskaitlis ir arī $(n^3-1)(n^2-1)$ dalītājs.

19. Dots vesels pozitīvs skaitlis n. Pierādīt, ka vienādojumam

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3n$$

nav atrisinājuma pozitīvos racionālos skaitļos.

20. Vai eksistē tāda bezgalīga nekonstanta aritmētiska progresija, kurā katru locekli var izteikt formā a^b, kur a un b ir veseli pozitīvi skaitļi, un $b \geqslant 2$?