



Jautājumus drīkst uzdot pirmo 30 minūšu laikā.

No palīg līdzekļiem drīkst izmantot tikai rakstāmpiederumus un zīmēšanas piederumus.

Risināšanas laiks: 4 1/2 stundas.

1. Pieņemsim, ka n ir naturāls skaitlis un kopa $\{1, 2, \dots, 2n\}$ ir sadalīta n divu elementu apakškopās P_1, P_2, \dots, P_n . Katrai apakškopai P_i ar p_i apzīmēsim abu tās elementu reizinājumu. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} < 1.$$

2. Veselu skaitļu virkni a_1, a_2, a_3, \dots sauc par *precīzu*, ja visiem $n > m$ pastāv sakarība $a_n^2 - a_m^2 = a_{n-m}a_{n+m}$. Pierādīt, ka eksistē precīza virkne, kurai $a_1 = 1, a_2 = 0$, un aprēķināt šādai virknei a_{2007} .
3. Pieņemsim, ka F, G, H ir polinomi ar reāliem koeficientiem, kuru pakāpes nav lielākas par $2n + 1$ un kuriem izpildās nosacījumi:

- (1) Visiem reāliem x

$$F(x) \leq G(x) \leq H(x).$$

- (2) Eksistē tādi dažādi reāli skaitļi x_1, x_2, \dots, x_n , ka

$$F(x_i) = H(x_i) \quad \text{pie } i = 1, 2, \dots, n.$$

- (3) Eksistē tāds reāls skaitlis x_0 , kurš atšķiras no visiem x_1, x_2, \dots, x_n , ka

$$F(x_0) + H(x_0) = 2G(x_0).$$

Pierādīt, ka $F(x) + H(x) = 2G(x)$ visiem reāliem skaitļiem x .

4. Doti pozitīvi reāli skaitļi a_1, a_2, \dots, a_n , un $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Pierādīt, ka

$$(2S + n)(2S + a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_na_1) \geq 9(\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_2a_3} + \dots + \sqrt{a_na_1})^2.$$

5. Funkcija f ir definēta visiem reāliem skaitļiem, izņemot 0, un pieņem visas reālas vērtības, izņemot 1. Dots arī, ka visiem $x, y \neq 0$

$$f(xy) = f(x)f(-y) - f(x) + f(y)$$

un visiem $x \notin \{0, 1\}$

$$f(f(x)) = \frac{1}{f(\frac{1}{x})}$$

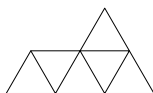
Noskaidrojiet visas šādas funkcijas f .

6. Fredis uzraksta skaitļus $1, 2, \dots, n$ kaut kādā secībā. Pēc tam viņš izveido visu tādu pāru (i, j) sarakstu, ka $1 \leq i < j \leq n$ un i -tais skaitlis viņa secībā ir lielāks nekā j -tais skaitlis viņa secībā. Pēc tam Fredis atkārtoti sekojošu procedūru, kamēr vien tas iespējams:

- izvēlas pāri (i, j) no saraksta
- samaina secībā vietām i -to un j -to skaitli
- izsvīturo pāri (i, j) no saraksta.

Pierādīt, ka Fredis var izvēlēties pārus tā, ka, procesam beidzoties, skaitļi būs sakārtoti augošā secībā.

7. *Sfinksa* sastāv no sešiem regulāriem trijstūriem ar malas garumu 1 (skat. zīmējumu). Noskaidrojiet, kādiem veseliem skaitļiem n regulāru trijstūri ar malas garumu n var pilnīgi pārklāt ar sfinksām (sfinksu pagriešana un spoguļattēlošana ir pieļauta, bet tās nedrīkst ne savstarpēji pārklāties, ne daļēji iziet ārpus trijstūra).



8. Veselu skaitļu kopu A saucim par *neizolētu*, ja katram $a \in A$ vismaz viens no skaitļiem $a - 1$ un $a + 1$ arī pieder kopai A . Pierādīt, ka kopai $\{1, 2, \dots, n\}$ ir tieši $(n - 4)^2$ neizolētas apakškopas, kas katra sastāv no pieciem elementiem.
9. Kādai biedrībai jāievēl valde. Katrs biedrības loceklis ir izvirzījis 10 kandidātus, bet viņš būs laimīgs, ja ievēlēs kaut vienu no tiem. Ir zināms, ka katriem sešiem biedrības locekļiem var atrast tādus divus kandidātus, kuru abu ievēlēšana padarīs visus šos sešus locekļus laimīgus. Pierādīt: ir iespējams ievēlēt valdi, kas sastāv no 10 personām, tā, ka visi biedrības locekļi ir laimīgi.
10. Dota tabula, kas sastāv no 18×18 rūtiņām. Katra rūtiņa var būt vai nu balta, vai melna. Sākumā visas rūtiņas ir baltas. Ar vienu gājienu var izvēlēties vai nu vienu rindiņu, vai vienu kolonnu un mainīt tajā visu rūtiņu krāsas. Vai, atkārtojot šādus gājienu, ir iespējams panākt, lai tabulā būtu tieši 16 melnas rūtiņas?
11. Trijstūra ABC augstumi ir AD , BE un CF . Punktiem P , Q , R un S vienlaicīgi izpildās šādi nosacījumi:
- (1) P ir trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas centrs.
 - (2) Visu nogriežņu PQ , QR un RS garumi ir vienādi ar trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas rādiusu.
 - (3) Orientētajam nogriežnim PQ ir tāds pats virziens un vērsums kā orientētajam nogriežnim AD . Līdzīgi, QR ir tāds pats virziens un vērsums kā BE , un RS - tāds pats virziens un vērsums kā CF .

Pierādīt, ka S ir trijstūrī ABC ievilktais riņķa līnijas centrs.

12. Uz trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas loka \widehat{AB} , kurš nesatur virsotni C , atlikts punkts M . Pieņemsim, ka M projekcijas uz taisnēm AB un BC atrodas uz atbilstošajām malām, nevis to pagarinājumiem. Apzīmēsim šīs projekcijas attiecīgi ar X un Y . Ar K un N apzīmēsim attiecīgi nogriežņu AC un XY viduspunktus. Pierādīt, ka $\angle MNK = 90^\circ$.
13. Telpā dotas k dažādas taisnes t_1, t_2, \dots, t_k , kur $k > 1$. Pierādīt, ka uz katras taisnes t_i var atrast punktu P_i , tā, ka P_{i+1} ir punkta P_i projekcija uz taisnes t_{i+1} , $i = 1, \dots, k - 1$, un P_1 ir punkta P_k projekcija uz taisnes t_1 .
14. Dots, ka izliektā četrstūrī $ABCD$ pastāv vienādība $\angle ADC = 90^\circ$. Punkti E un F ir punkta B projekcijas attiecīgi uz taisnēm AD un AC . Pieņemsim, ka F atrodas starp A un C , A atrodas starp D un E , un taisne EF iet caur nogriežņa BD viduspunktu. Pierādīt, ka ap četrstūri $ABCD$ var apvilkt riņķa līniju.
15. Trijstūrī ABC ieviktā riņķa līnija pieskaras malai AC punktā D . Cita riņķa līnija iet caur D un pieskaras stariem BC un BA , pie tam staram BA - punktā A . Aprēķināt attiecību AD/DC .
16. Dots, ka a un b ir racionāli skaitļi un $s = a + b = a^2 + b^2$. Pierādīt, ka s var izteikt kā daļu, kuras saucējs ir savstarpējs pirmskaitlis ar 6.
17. Dots, ka x , y , z ir naturāli skaitļi un $\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{z} + \frac{z+1}{x}$ ir vesels skaitlis. Ar d apzīmēsim skaitļu x , y un z lielāko kopīgo dalītāju. Pierādīt, ka $d \leq \sqrt[3]{xy + yz + zx}$.
18. Dots, ka a , b , c , d ir tādi no nulles atšķirīgi veseli skaitļi, ka vienādojuma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$$

vienīgais atrisinājums veselos skaitļos ir $x = y = z = t = 0$. Vai no tā noteikti izriet, ka visiem skaitļiem a , b , c , d ir viena un tā pati zīme?

19. Dots, ka r un k ir naturāli skaitļi un visi pirmskaitļi, ar kuriem dalās r , ir lielāki par 50.

Naturālu skaitli n sauc par *jauku*, ja tam vienlaicīgi izpildās šādas divas īpašības:

- skaitļa n decimālajā pierakstā ir vismaz k cipari (neieskaitot nulles skaitļa priekšā),
- katri k cipari, kuri skaitļa n decimālajā pierakstā uzrakstīti pēc kārtas (var būt, ka daži pirmie no šiem k cipariem ir nulles), veido tāda skaitļa decimālo pierakstu, kurš dalās ar r .

Pierādīt: ja eksistē bezgalīgi daudz jauku skaitļu, tad arī skaitlis $10^k - 1$ ir jauks.

20. Dots, ka a un b ir naturāli skaitļi, $b < a$ un $a^3 + b^3 + ab$ dalās ar $ab(a - b)$. Pierādīt, ka ab ir kāda vesela skaitļa kubs.