Baltijas ceļš 2008

Gdaņska, 2008. gada 8. novembris.

Risināšanas laiks: 4,5 stundas.
Jautājumus rakstiskā veidā var iesniegt pirmo 30 minūšu laikā.

1. **uzdevums.** Atrodiet visus polinomus $p(x)$ ar reāliem koeficientiem, kuriem $p(0) = 0$ un

$$p((x+1)^3) = (p(x)+1)^3.$$

2. **uzdevums.** Pierādiet, ka, ja reāli skaitļi a, b un c apmierina sakarību $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, tad

$$\frac{a^2}{2+b+c^2} + \frac{b^2}{2+c+a^2} + \frac{c^2}{2+a+b^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{12}.$$

Kad izpildās vienādība?

3. **uzdevums.** Vai eksistē tāds leņķis $\alpha \in (0, \pi/2)$, ka $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ un $\operatorname{ctg}\alpha$, ņemti kaut kādā kārtībā, ir četri pēc kārtas sekojoši aritmētiskās progresijas locekļi?

4. **uzdevums.** Polinoma P koeficienti ir veseli skaitļi, un pieciem dažādiem veseliem skaitļiem x izpildās $P(x) = 5$. Pierādiet, ka neeksistē vesels skaitlis x, kuram $-6 \leq P(x) \leq 4$ vai $6 \leq P(x) \leq 16$.

5. **uzdevums.** Romeo un Džuljetai katram ir regulārs tetraedrs, kura virsotnēs ir ierakstīti pozitīvi reāli skaitļi. Viņi katrai šķautnei piekārto to skaitļu reizinājumu, kas ir ierakstīti tās galapunktos. Tad katrā skaldnē ieraksta to triju skaitļu summu, kas piekārtoti tās malām. Izrādās, ka četri skaitļi, kas ierakstī Romeo tetraedra skaldnēs, sakrīt ar tiem četriem skaitļiem, kas ierakstīti Džuljetas tetraedra skaldnēs. Vai no tā izriet, ka 4 skaitļi, kas ierakstīti Romeo tetraedra virsotnēs, sakrīt ar četriem skaitļiem, kas ierakstīti Džuljetas tetraedra virsotnēs?

6. **uzdevums.** Atrast visas galīgas naturālu skaitļu kopas, kurās ir vismaz divi elementi un kurām, ja a, b ($a > b$) pieder kopai, tad $\frac{b^2}{a-b}$ arī pieder šai kopai.

7. **uzdevums.** Cik naturālu skaitļu pāru (m, n), kuriem $m < n$, apmierina vienādību

$$\frac{3}{2008} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\ ?$$

8. **uzdevums.** Aplūkosim naturālu skaitļu kopu A, kuras mazākais elements ir 1001 un visu elementu reizinājums ir pilns kvadrāts. Kāda ir kopas A maksimālā elementa mazākā iespējamā vērtība?

9. **uzdevums.** Naturāli skaitļi a un b apmierina sakarību

$$a^b - b^a = 1008.$$

Pierādīt, ka a un b ir kongruenti pēc moduļa 1008.

10. uzdevums. Naturālam skaitlim n ar $S(n)$ apzīmēsim tā ciparu summu. Atrodiet izteiksmes $\dfrac{S(n)}{S(16n)}$ maksimālo iespējamo vērtību.

11. **uzdevums.** 84 elementu kopa A ir kopas $\{1, 2, \ldots, 169\}$ apakškopa. Zināms, ka nekādu divu A elementu summa nav 169. Pierādīt, ka kāds no A elementiem ir naturāla skaitļa kvadrāts.

12. **uzdevums.** Klasē ir $3n$ bērni. Katri divi bērni uzdāvina kopīgu dāvanu tieši vienam citam bērnam. Visiem nepāra n pierādiet, ka to var izdarīt tā, ka izpildās sekojoša īpašība:

Katriem trim bērniem A, B un C, ja A un B uzdāvina dāvanu C, tad A un C uzdāvina dāvanu B.

13. **uzdevums.** Starptautiska matemātikas konkursa dalībvalstīm bija jāizvēlas starp 9 kombinatorikas uzdevumiem. Parasti ir grūti nonākt pie kopēja viedokļa , tāpēc nebija pārsteigums, ka notika sekojošais:

- Katra valsts nobalsoja par tieši 3 uzdevumiem.
- Katras divas valstis nobalsoja par dažādām uzdevumu kopām.
- Jebkurām trim valstīm bija uzdevums, par kuru nenobalsoja neviena no tām.

Atrast maksimālo dalībvalstu skaitu, kam iespējama šāda situācija.

14. **uzdevums.** Vai iespējams salikt $4 \times 4 \times 4$ kubu no šādas formas blokiem, kas sastāv no četriem $1 \times 1 \times 1$ kubiņiem?

15. **uzdevums.** Uz $n \times n$ lauciņu šaha galdiņa uzlikti vairāki 1×2 domino kauliņi, katrs no kuriem nosedz divas blakus rūtiņas. Zināms, ka nekādi divi kauliņi nesaskaras (pat ar stūriem ne). Atrast mazāko iespējamo n vērtību, pie kuras kopējais laukums, kuru nosedz domino kauliņi, ir 2008.

16. **uzdevums.** $ABCD$ ir paralelograms. Riņķa līnija ar diametru AC krusto taisni BD punktos P un Q. Taisnes AC perpendikuls, kas iet caur punktu C, krusto taisnes AB un AD punktos X un Y. Pierādīt, ka punkti P, Q, X un Y atrodas uz vienas riņķa līnijas.

17. **uzdevums.** Dota riņķa līnijā. Tajā ievilkta četrstūra malu garumi ir a, b, c un d. Pierādīt, ka reizinājuma $(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)$ maksimālā vērtība tiek sasniegta, ja četrstūris ir kvadrāts.

18. **uzdevums.** AB ir riņķa līnijas S diametrs, un L ir šīs riņķa līnijas pieskare punktā A. Pieņemsim, ka c ir fiksēts pozitīvs reāls skaitlis, un apskatīsim visus punktu pārus (X, Y) , kam X un Y atrodas uz taisnes L dažādās pusēs no A un $|AX| \cdot |AY| = c$. Taisnes BX un BY krusto S punktos P un Q. Pierādīt, ka visas taisnes PQ krustojas vienā punktā.

19. **uzdevums.** Riņķa līnijā ar diametru 1 novilktas vairākas hordas. To garumu summa ir lielāka par 19. Pierādīt, ka eksistē diametrs, kas krusto vismaz 7 hordas.

20. **uzdevums.** ABC ir trijstūris. M ir punkts uz malas BC un N ir punkts uz malas AB, kas izvēlēti tā, lai AM un CN būtu trijstūra ABC leņķu bisektrises. Pierādīt, ka no vienādības

$$\frac{\angle BNM}{\angle MNC} = \frac{\angle BMN}{\angle NMA},$$

seko, ka trijstūris ABC ir vienādsānu.