LATVIEŠU

BALTIJAS CEĻŠ 2010

REIKJAVĪKA, 2010. GADA 6. NOVEMBRĪ.

Risināšanas laiks: $4\frac{1}{2}$ stundas.
Jautājumus drīkst uzdot pirmo 30 minūšu laikā.
Atļauts izmantot tikai lineālu, cirkuli un rakstāmpiederumus.
Katru uzdevumu vērtē ar 5 punktiem.

1. uzdevums. Atrast visus reālo skaitļu komplektus (a,b,c,d), kas apmierina vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases}(b+c+d)^{2010}=3a\\(a+c+d)^{2010}=3b\\(a+b+d)^{2010}=3c\\(a+b+c)^{2010}=3d.\end{cases}$$

2. uzdevums. Dots reāls skaitlis x, tāds, ka $0<x<\frac{\pi}{2}$. Pierādīt, ka

$$\cos^2(x)\operatorname{ctg}(x)+\sin^2(x)\operatorname{tg}(x)\geq 1.$$

3. uzdevums. Doti reāli skaitļi x_1, x_2, $\ldots$, x_n $(n\geq 2)$, kuri visi lielāki par 1. Zināms, ka $|x_i-x_{i+1}|<1$ visiem $i=1,2,\ldots,n-1$. Pierādīt, ka

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}<2n-1.$$

4. uzdevums. Atrast visus polinomus $P(x)$ ar reāliem koeficientiem, tādus, ka visiem veseliem skaitļiem x izpildās

$$(x-2010)P(x+67)=xP(x).$$

5. uzdevums. Ar $\mathbb{R}$ apzīmē reālo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, tādas, ka visiem $x,y\in\mathbb{R}$ izpildās

$$f(x^2)+f(xy)=f(x)f(y)+yf(x)+xf(x+y).$$

6. uzdevums. $n\times n$ rūtiņu laukums nokrāsots n krāsās tā, ka galvenā diagonāle (no kreisā augšējā līdz labajam apakšējam luciņam) ir nokrāsota pirmajā krāsā; abas tai blakus esošās diagonāles ir nokrāsotas otrajā krāsā; divas nākamās blakus diagonāles (viena augstāk un viena zemāk) nokrāsotas trešajā krāsā, utt.; divi stūrīši (labais augšējais un kreisais apakšējais) nokrāsoti n-jā krāsā. Uz laukuma ir iespējams novietot n torņus tā, ka tie neapdraud viens otru un katrs stāv uz citas krāsas luciņa. Pierādīt, ka $n\equiv 0 \pmod 4$ vai $n\equiv 1 \pmod 4$.

7. uzdevums. Valstī ir vairākas pilsētas, viena no tām ir galvaspilsēta. Katrām divām pilsētām A un B ir tiešais reiss no A uz B un tiešais reiss no B uz A, abi šie reisi maksā vienādi. Zināms, ka visiem slēgtiem maršrutiem, kas iet caur katru pilsētu tieši vienu reizi, ir viena un tā pati cena. Pierādīt, ka visiem slēgtiem maršrutiem, kas iet caur katru pilsētu, izņemot galvaspilsētu, tieši vienu reizi, arī ir viena un tā pati cena.

8. uzdevums. Korī ir 30 dalībnieki un katram no tiem ir tieši viena cepure. Kādā dienā katrs dalībnieks uzdāvināja savu cepuri kādam citam kora dalībniekam (iespējams, ka daži dalībnieki saņēma vairākas cepures). Pierādīt, ka var izvēlēties tādu 10 dalībnieku grupu, ka neviens no šīs grupas nav saņēmis cepuri no kāda cita šīs grupas dalībnieka.

9. uzdevums. Kaudzē atrodas 1000 sērkociņi. Divi dalībnieki pēc kārtas izdara gājienus. Katrā gājienā no kaudzes var paņemt no 1 līdz 5 sērkociņiem; kā arī ne vairāk kā 10 reizes visas spēles laikā ir atļauts veikt īpašo gājienu - paņemt 6 sērkociņus. Piemēram, 7 īpašos gājienus var būt veicis pirmais spēlētājs un 3 - otrais, tad īpašie gājieni vairāk nav atļauti. Uzvar tas spēlētājs, kurš paņem pēdējo sērkociņu. Kuram spēlētājam ir uzvaroša stratēģija?

10. uzdevums. Dots vesels skaitlis n, kur $n \geq 3$. Aplūkosim visus izliekta n-stūra sadalījumus trijstūros ar $n-3$ diagonālēm, kuras nekrustojas, un visus šo trijstūru krāsojumus baltos un melnos tā, ka trijstūri, kam ir kopīga mala, vienmēr nokrāsoti dažādās krāsās. Atrast mazāko iespējamo melno trijstūru skaitu.

11. uzdevums. Kvadrāta $ABCD$ diagonāles AC and BD krustojas punktā S. Riņķa līnijas k un k', kas iet attiecīgi caur punktiem A, C un B, D, krustojas divos dažādos punktos P un Q. Pierādīt, ka S atrodas uz taisnes PQ.

12. uzdevums. Dota trapece $ABCD$, kas nav paralelograms.

a) Pierādīt, ka tās malu AB, BC, CD, DA garumi (šādā secībā) neveido aritmētisko progresiju.
b) Pierādīt, ka eksistē šāda trapece, kuras malu AB, BC, CD, DA garumi, samainot to secību, veido aritmētisko progresiju.

13. uzdevums. Šaurleņķa trijstūrī ABC novilkts augstums CD; H ir augstumu krustpunkts. Dots, ka trijstūrim apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas uz taisnes, kas satur leņķa DHB bisektrisi. Noteikt visas iespējamās leņķa CAB vērtības.

14. uzdevums. Dots, ka ABC - šaurleņķa trijstūris. Punkti D un E atrodas attiecīgi uz tā malām AC un BC, tā, ka A, B, D un E pieder vienai riņķa līnijai. Riņķa līnija, kas iet caur D, E un C, krusto malu AB divos punktos X un Y. Pierādīt, ka perpendikuls, kas novilkts no C pret AB, iet caur XY viduspunktu.

15. uzdevums. Punkti M un N ir izvēlēti uz trijstūra ABC bisektrises AL tā, ka $\angle ABM = \angle ACN = 23°$. Trijstūra iekšienē atrodas punkts X tā, ka $BX = CX$ un $\angle BXC = 2\angle BML$. Aprēķināt $\angle MXN$.

16. uzdevums. Naturālam skaitlim k ar $d(k)$ apzīmē tā dalītāju skaitu (piemēram, $d(12) = 6$) un ar $s(k)$ apzīmē tā ciparu summu (piemēram, $s(12) = 3$). Naturālu skaitli n sauc par *burvīgu*, ja eksistē tāds naturāls skaitlis k, ka $d(k) = s(k) = n$. Kāds ir mazākais *burvīgais* naturālais nepāra skaitlis, kas lielāks par 1?

17. uzdevums. Atrast visus tādus naturālus skaitļus n, ka n^2 decimālais pieraksts satur tikai nepāra ciparus.

18. uzdevums. Dots, ka p - pirmskaitlis. Katram k, $1 \leq k \leq p-1$, eksistē viens vienīgs vesels skaitlis, apzīmēsim to ar k^{-1}, tāds, ka $1 \leq k^{-1} \leq p-1$ un $k^{-1} \cdot k \equiv 1 \pmod p$. Pierādīt, ka virkne

$$1^{-1}, \quad 1^{-1} + 2^{-1}, \quad 1^{-1} + 2^{-1} + 3^{-1}, \quad \ldots, \quad 1^{-1} + 2^{-1} + \ldots + (p-1)^{-1}$$

(saskaitot pēc moduļa p) satur ne vairāk kā $(p+1)/2$ dažādus locekļus.

19. uzdevums. Kādiem k var atrast k dažādus pirmskaitļus $p_1, p_2, \ldots, p_k$, tādus, ka

$$p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_k^2 = 2010?$$

20. uzdevums. Atrast visus naturālos skaitļus n, kuriem eksistē naturālo skaitļu kopas $\mathbb{N}$ bezgalīga apakškopa A, tāda, ka jebkuriem dažādiem $a_1, \ldots, a_n \in A$ skaitļi $a_1 + \ldots + a_n$ un $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ ir savstarpēji pirmskaitļi.