Uzdevumi –Latvian version–

1. **uzdevums.** Reāliem skaitļiem $x_1, \dots, x_{2011}$ izpildās sakarības

$$x_1 + x_2 = 2x'_1, \quad x_2 + x_3 = 2x'_2, \quad \dots, \quad x_{2011} + x_1 = 2x'_{2011}$$

kur $x'_1, x'_2, \dots, x'_{2011}$ ir skaitļu $x_1, x_2, \dots, x_{2011}$ permutācija. Pierādiet, ka $x_1 = x_2 = \dots = x_{2011}$.

2. **uzdevums.** Dota funkcija $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, tāda, ka visiem veseliem x un y izpildās:

$$f(f(x) - y) = f(y) - f(f(x)).$$

Pierādiet, ka f ir ierobežota, t.i. eksistē tāda konstante C, ka $-C < f(x) < C$ visiem veseliem skaitļiem x.

3. **uzdevums.** Nenegatīvu veselu skaitļu virknē $a_1, a_2, a_3, \dots$ visiem $n > 2$ piemīt īpašība, ka a_{n+1} ir $a_n^n + a_{n-1}$ pēdējais cipars. Vai noteikti eksistē tāds n_0, ka virkne $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots$ ir periodiska?

4. **uzdevums.** Doti nenegatīvi reāli skaitļi a, b, c, d, tādi, ka $a+b+c+d = 4$. Pierādiet nevienādību

$$\frac{a}{a^3+8} + \frac{b}{b^3+8} + \frac{c}{c^3+8} + \frac{d}{d^3+8} \le \frac{4}{9}.$$

5. **uzdevums.** Dota funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurai visiem reāliem x

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1$$

Atrodiet $f(0)$ vērtību.

6. **uzdevums.** Dots naturāls skaitlis n. Pierādiet, ka ir vismaz $\frac{n^2}{4}$ tādas taisnes, kas iet caur koordinātu sākumpunktu un tieši vienu citu punktu ar veselām koordinātām $(x,\ y)$, $0 \le x, y \le n$.

7. **uzdevums.** Apzīmēsim ar T 15-elementu kopu $\{10a + b : a, b \in \mathbb{Z}, 1 \le a < b \le 6\}$. S ir tāda T apakškopa, kurā sastopami visi seši cipari $1, 2, \dots, 6$, bet kurā nav tādu triju elementu, kas kopā saturētu visus sešus ciparus. Atrodiet lielāko iespējamo kopas S elementu skaitu.

8. **uzdevums.** Katru no trim Greifsvaldes skolām A, B un C apmeklē vismaz viens skolēns. No katriem trim skolēniem, pa vienam no katras skolas A, B un C, var atrast divus, kuri pazīst viens otru un divus, kuri nepazīst viens otru. Pierādiet, ka vismaz viens no sekojošiem apgalvojumiem ir patiess:

- kāds skolēns no A pazīst visus skolēnus no B;
- kāds skolēns no B pazīst visus skolēnus no C;
- kāds skolēns no C pazīst visus skolēnus no A.

9. **uzdevums.** Dots taisnstūris, kura izmērs ir $m \times n$ rūtiņas, tās nokrāsotas melnā vai baltā krāsā. Krāsojumu sauksim par *labu*, ja izpildās sekojoši nosacījumi:

- Visas rūtiņas, kas pieskaras taisnstūra malai, ir melnas.
- Nekādas četras rūtiņas, kas veido 2×2-kvadrātu, nav nokrāsotas vienā krāsā.
- Nekādas četras rūtiņas, kas veido 2×2-kvadrātu, nav nokrāsotas tā, ka vienā krāsā ir tikai tās rūtiņas, kas saskaras tikai ar stūriem (pa diagonāli).

Kādiem taisnstūra izmēriem $m \times n$ $(m, n \ge 3)$ ir iespējams labs krāsojums?

Uzdevumi –Latvian version–

10. **uzdevums.** Divi spēlētāji spēlē sekojošu spēli ar veseliem skaitļiem. Sākotnējais skaitlis ir 2011^{2011}. Spēlētāji gājienus izdara pēc kārtas. Vienā gājienā no tā var vai nu atņemt kādu naturālu skaitli starp 1 un 2010 ieskaitot, vai arī izdalīt to ar 2011, noapaļojot uz leju līdz tuvākajam veselajam skaitlim, kad tas nepieciešams. Uzvar spēlētājs, kurš pirmais iegūst nepozitīvu skaitli. Kuram spēlētājam ir uzvaroša stratēģija?

11. **uzdevums.** AB un CD ir divi riņķa līnijas $\mathcal{C}$ diametri. Patvaļīgam uz $\mathcal{C}$ izvēlētam punktam P, ar R un S apzīmēsim tā projekcijas attiecīgi uz AB un CD. Pierādiet, ka nogriežņa RS garums nav atkarīgs no punkta P izvēles.

12. **uzdevums.** Kvadrāta $ABCD$ iekšpusē izvēlēts tāds punkts P, ka $PA : PB : PC$ ir $1 : 2 : 3$. Aprēķiniet leņķi $\angle BPA$.

13. **uzdevums.** Punkts E atrodas izliekta četrstūra $ABCD$ iekšpusē. Četrstūra ārpusē konstruēti trijstūri $\triangle ABF$, $\triangle BCG$, $\triangle CDH$ un $\triangle DAI$ tā, ka $\triangle ABF \sim \triangle DCE$, $\triangle BCG \sim \triangle ADE$, $\triangle CDH \sim \triangle BAE$ un $\triangle DAI \sim \triangle CBE$. Punkti P, Q, R un S ir punkta E projekcijas attiecīgi uz taisnēm AB, BC, CD un DA. Pierādiet, ka, ja četrstūrim $PQRS$ var apvilkt riņķa līniju, tad

$$EF \cdot CD = EG \cdot DA = EH \cdot AB = EI \cdot BC\,.$$

14. **uzdevums.** Trijstūrī ABC ievilktā riņķa līnija pieskaras tā malām BC, CA, AB attiecīgi punktos D, E, F. Uz šīs riņķa līnijas izvēlēts tāds punkts G, ka FG ir tās diametrs. Taisnes EG un FD krustojas punktā H. Pierādiet, ka $CH \parallel AB$.

15. **uzdevums.** Punkts E atrodas uz izliekta četrstūra $ABCD$ malas AD. Zināms, ka $\angle ADB = \angle BDC$ un

$$AE \cdot ED + BE^2 = CD \cdot AE.$$

Pierādiet, ka $\angle EBA = \angle DCB$.

16. **uzdevums.** Dots patvaļīgs vesels skaitlis a un skaitļu virkne $x_0, x_1, \ldots$, kur $x_0 = a$, $x_1 = 3$ un

$$x_n = 2x_{n-1} - 4x_{n-2} + 3 \text{ visiem } n > 1.$$

Atrodiet lielāko skaitli k_a, kuram var atrast tādu pirmskaitli p, ka $x_{2011} - 1$ dalās ar p^{k_a}.

17. **uzdevums.** Atrodiet visus naturālos skaitļus d, kuriem ir spēkā īpašība: ja d ir kāda naturāla skaitļa n dalītājs, tad d ir arī jebkura tāda skaitļa dalītājs, kuru var iegūt no n, samainot vietām tā ciparus.

18. **uzdevums.** Atrodiet visus pirmskaitļu pārus (p, q), tādus, ka gan $p^2 + q^3$, gan $q^2 + p^3$ ir naturālu skaitļu kvadrāti.

19. **uzdevums.** Dots pirmskaitlis $p \neq 3$. Pierādiet, ka var atrast aritmētisku progresiju $x_1, x_2, \ldots, x_p$, kas sastāv no dažādiem naturāliem skaitļiem, kuras visu locekļu reizinājums ir naturāla skaitļa kubs.

20. **uzdevums.** Vesels skaitlis $n \geq 1$ ir *balansēts*, ja starp tā dalītājiem ir pāra skaits pirmskaitļu. Pierādiet, ka eksistē bezgalīgi daudz naturālu skaitļu n, tādu, ka no skaitļiem n, $n+1$, $n+2$ un $n+3$ tieši divi ir balansēti.