46-я Международная математическая олимпиада

Первый день

Мерида, Мексика, среда, 13 июля 2005

Language: Russian

Задача 1. На сторонах равностороннего треугольника ABC выбраны шесть точек: A_1, A_2 на BC; B_1, B_2 на CA; и C_1, C_2 на AB. Эти точки являются вершинами выпуклого шестиугольника $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$, стороны которого имеют равные длины. Докажите, что прямые A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 пересекаются в одной точке.

Задача 2. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ – последовательность целых чисел, в которой содержится бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов. Известно, что для каждого натурального n все n остатков от деления чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на n различны. Докажите, что каждое целое число встречается в этой последовательности ровно один раз.

Задача 3. Пусть x, y и z – положительные числа такие, что $xyz \geq 1$. Докажите, что

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов