46-я Международная математическая олимпиада

Второй день

Мерида, Мексика, четверг, 14 июля 2005

Language: Russian

Задача 4. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ определена следующим образом:

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Найдите все натуральные числа, которые взаимно просты с каждым членом этой последовательности.

Задача 5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, стороны BC и AD которого равны, но не параллельны. Пусть E и F – внутренние точки отрезков BC и AD соответственно такие, что $BE = DF$. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, прямые BD и EF пересекаются в точке Q, прямые EF и AC пересекаются в точке R. Рассмотрим треугольники PQR, получаемые для всех таких точек E и F. Докажите, что окружности, описанные около всех этих треугольников, имеют общую точку, отличную от P.

Задача 6. На математической олимпиаде участникам были предложены 6 задач. Оказалось, что каждая пара задач была решена более чем $\frac{2}{5}$ от общего числа участников, но никто не решил все 6 задач. Докажите, что найдутся по крайней мере два участника, каждый из которых решил ровно 5 задач.

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 7 баллов