Pirmdiena, 2011. gada 18. jūlijs.

1. uzdevums. Katrai četru dažādu naturālu skaitļu kopai $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ar s_A apzīmēsim tās elementu summu $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Ar n_A apzīmēsim tādu pāru (i, j) skaitu, kuriem $1 \leq i < j \leq 4$ un s_A dalās ar $a_i + a_j$. Atrodiet visas četru dažādu naturālu skaitļu kopas A, kam n_A vērtība ir lielākā iespējamā.

2. uzdevums. Plaknē dota galīga punktu kopa $\mathcal{S}$, kas sastāv no vismaz diviem punktiem. Zināms, ka nekādi trīs punkti no $\mathcal{S}$ neatrodas uz vienas taisnes. Par *vējdzirnavām* sauksim sekojošu procesu. Sākumā tiek izvēlēta taisne ℓ, uz kuras atrodas tieši viens punkts $P \in \mathcal{S}$. Taisne ℓ griežas pulksteņa rādītāja virzienā ap punktu P kā *centru*, līdz uz tās pirmo reizi nonāk vēl kāds punkts no kopas $\mathcal{S}$. Šajā brīdī šis punkts, apzīmēsim to ar Q, kļūst par jauno rotācijas centru, un taisne turpina griezties pulksteņa rādītaja virzienā ap punktu Q, līdz uz tās atkal nonāk vēl kāds punkts no kopas $\mathcal{S}$, u.t.t. Šis process turpinās bezgalīgi.
Pierādīt, ka var izvēlēties punktu $P \in \mathcal{S}$ un taisni ℓ, kas iet caur punktu P, tā, ka vējdzirnavām, kas sākas ar šo taisni ℓ, katrs punkts no kopas $\mathcal{S}$ kalpos par centru bezgalīgi daudz reižu.

3. uzdevums. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir tāda, ka visiem reāliem skaitļiem x un y izpildās

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

Pierādīt, ka $f(x) = 0$ visiem $x \leq 0$.

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes
Katrs uzdevums tiek vērtēts ar 7 punktiem

Otrdiena, 2011. gada 19. jūlijs.

4. uzdevums. Dots naturāls skaitlis n. Doti arī sviras svari un n atsvari, kuru svars ir attiecīgi $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Visi atsvari n soļos ir jāuzliek uz svaru kausiem, tas ir, katrā solī var izvēlēties vienu no atsvariem, kas vēl nav uzlikti uz svariem, un uzlikt to vai nu uz labā vai kreisā svaru kausa; pie tam, nevienā brīdī labais svaru kauss nedrīkst būt smagāks par kreiso.
Noskaidrojiet, cik dažādos veidos iespējams izpildīt šādu darbību virkni.

5. uzdevums. Par funkciju $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ zināms, ka jebkuriem veseliem m un n starpība $f(m) - f(n)$ dalās ar $f(m-n)$. Pierādīt, ka jebkuriem veseliem m un n, tādiem, ka $f(m) \le f(n)$, skaitlis $f(n)$ dalās ar $f(m)$.

6. uzdevums. Taisne ℓ ir pieskare ap šaurleņķa trijstūri ABC apvilktajai riņķa līnijai Γ. Taisnes ℓ_a, ℓ_b un ℓ_c ir simetriskas taisnei ℓ attiecīgi pret taisnēm BC, CA un AB. Pierādīt, ka riņķa līnija, kas apvilkta ap trijstūri, ko veido taisnes ℓ_a, ℓ_b un ℓ_c, pieskaras riņķa līnijai Γ.

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes
Katrs uzdevums tiek vērtēts ar 7 punktiem