Latvian version

Pirmā diena
2007. gada 25. jūlijs

1. Uzdevums. Doti reāli skaitļi $a_1, a_2, ..., a_n$. Katram i $(1 \le i \le n)$ definējam

$$d_i = \max\{a_j : 1 \le j \le i\} - \min\{a_j : i \le j \le n\}$$

un definējam

$$d = \max\{d_i : 1 \le i \le n\}.$$

(a) Pierādīt, ka brīvi izvēlētiem reāliem skaitļiem $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$ ir spēkā nevienādība

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \le i \le n\} \ge \frac{d}{2}. \qquad (*)$$

(b) Pierādīt, ka eksistē tādi reāli skaitļi $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$, kam izteiksmē (*) ir spēkā vienādība.

2. Uzdevums. Doti pieci punkti A, B, C, D, E, tādi, ka četrstūris $ABCD$ ir paralelograms un ap četrstūri $BCED$ var apvilkt riņķa līniju. Taisne ℓ iet caur punktu A un krusto nogriezni DC tā iekšējā punktā F, kā arī krusto taisni BC punktā G. Ir zināms, ka $EF = EG = EC$. Pierādīt, ka ℓ ir leņķa DAB bisektrise.

3. Uzdevums. Starp matemātikas sacensību dalībniekiem daži savā starpā ir draugi; draudzība ir abpusēja – ja A draudzējas ar B, tad arī B draudzējas ar A. Dalībnieku grupu sauc par *kliķi*, ja katri divi dalībnieki no šīs grupas ir savā starpā draugi. (Līdz ar ko, par kliķi tiek uzskatīta arī jebkura grupa, kas sastāv no mazāk par diviem dalībniekiem). Dalībnieku skaitu kliķē sauc par kliķes *izmēru*.

Ir zināms, ka grupā, kas sastāv no visiem sacensību dalībniekiem, lielākās kliķes izmērs ir pāra skaitlis. Pierādīt, ka visus sacensību dalībniekus var izvietot divās istabās tā, ka lielākās kliķes izmērs vienā istabā izvietotajiem dalībniekiem ir vienāds ar lielākās kliķes izmēru otrā istabā izvietotajiem dalībniekiem.

Laiks darbam: 4 stundas 30 minūtes
Katrs uzdevums tiek vērtēts ar 7 punktiem

Latvian version

Otrā diena
2007. gada 26. jūlijs

4. Uzdevums. Trīsstūrī ABC leņķa BCA bisektrise otrreiz krusto šim trīsstūrim apvilkto riņķa līniju punktā R ($R \neq C$), kā arī krusto nogriežņa BC vidusperpendikulu punktā P, un nogriežņa AC vidusperpendikulu punktā Q. Punkts K ir nogriežņa BC viduspunkts un punkts L ir nogriežņa AC viduspunkts. Pierādīt, ka trīsstūru RPK un RQL laukumi ir vienādi.

5. Uzdevums. Dots, ka a un b ir veseli pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka, ja $(4a^2 - 1)^2$ dalās ar $4ab - 1$, tad $a = b$.

6. Uzdevums. Dots, ka n ir vesels pozitīvs skaitlis. Aplūkojam kopu

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\}, x + y + z > 0\},$$

kas sastāv no $(n+1)^3-1$ punktiem trīs dimensiju telpā. Noskaidrot, kāds ir mazākais iespējamais plakņu skaits, kuru apvienojums satur visus kopas S punktus, bet nesatur punktu $(0,0,0)$.

Laiks darbam: 4 stundas 30 minūtes
Katrs uzdevums tiek vērtēts ar 7 punktiem