

Trešdien, 2009. gada 15. jūlijā

1. uzdevums. Dots, ka n ir pozitīvs vesels skaitlis. Skaitļi a_1, \dots, a_k ($k \geq 2$) ir kopas $\{1, \dots, n\}$ elementi. Nekādi divi no tiem nav savā starpā vienādi. Dots, ka $a_i(a_{i+1}-1)$ dalās ar n visiem $i = 1, \dots, k-1$. Pierādiet, ka $a_k(a_1-1)$ nedalās ar n .

2. uzdevums. Trijstūra ABC apvilktais riņķa līnijas centrs ir O . Punkti P un Q ir atbilstoši malu CA un AB iekšēji punkti. Punkti K, L un M ir atbilstoši nogriežņu BP, CQ un PQ viduspunkti. Riņķa līnija Γ iet caur K, L un M . Taisne PQ ir riņķa līnijas Γ pieskare. Pierādiet, ka $OP = OQ$.

3. uzdevums. Dots, ka s_1, s_2, s_3, \dots ir stingri augoša virkne, kas sastāv no pozitīviem veseliem skaitļiem. Katra no apakšvirknēm

$$s_1, s_2, s_3, \dots \quad \text{un} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

ir aritmētiska progresija. Pierādiet, ka virkne s_1, s_2, s_3, \dots pati ir aritmētiska progresija.

Language: Latvian

*Laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Katrs uzdevums ir 7 punktus vērts.*

Ceturtdien, 2009. gada 16. jūlijā

4. uzdevums. Trijstūrī ABC pastāv vienādība $AB = AC$. Leņķu $\angle CAB$ un $\angle ABC$ bisektrises krusto malas BC un CA atbilstoši punktos D un E . Punkts K ir trijstūrī ADC ievilktais riņķa līnijas centrs. Dots, ka $\angle BEK = 45^\circ$. Noskaidrojiet visas iespējamās $\angle CAB$ vērtības.

5. uzdevums. Noskaidrojiet, kurām funkcijām f , kas definētas visiem veseliem pozitīviem skaitļiem un kas pieņem veselas pozitīvas vērtības, piemīt īpašība: katriem veseliem pozitīviem skaitļiem a un b eksistē nedeģenerēts trijstūris ar malu garumiem

$$a, f(b) \text{ un } f(b + f(a) - 1).$$

(Trijstūri sauc par nedeģenerētu, ja tā visas virsotnes neatrodas uz vienas taisnes.)

6. uzdevums. Doti pozitīvi veseli skaitļi a_1, a_2, \dots, a_n . Nekādi divi no tiem nav savā starpā vienādi. Dota arī kopa M , kas sastāv no $n-1$ pozitīva vesela skaitļa, bet nesatur skaitli $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Sākot no punkta ar koordinātu 0, sienāzīm jāveic n lēcieni pa skaitļu asi virzienā pa labi. Lēcienu garumiem jābūt a_1, a_2, \dots, a_n kaut kādā secībā. Pierādiet, ka sienāzis var izvēlēties tādu secību, ka viņš nekad nenonāk nevienā punktā ar koordinātu no kopas M .

Language: Latvian

*Laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Katrs uzdevums ir 7 punktus vērts.*