Trešdiena, 2010. gada 7. jūlijs.

1. uzdevums. Atrast visas funkcijas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tādas, ka vienādība

$$f\big([x]y\big) = f(x)\big[f(y)\big]$$

izpildās visiem $x, y \in \mathbb{R}$. (ar $[z]$ apzīmē lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz z.)

2. uzdevums. Trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas centrs ir I, un ap šo trijstūri apvilktā riņķa līnija ir Γ. Taisne AI krustojas ar Γ punktos A un D. Punkts E ir izvēlēts uz loka $\widehat{BDC}$ un punkts F uz malas BC tā, ka

$$\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE < \tfrac{1}{2}\sphericalangle BAC.$$

Punkts G ir IF viduspunkts. Pierādīt, ka taišņu DG un EI krustpunkts atrodas uz riņķa līnijas Γ.

3. uzdevums. Ar $\mathbb{N}$ apzīmē visu veselo pozitīvo skaitļu kopu. Atrast visas funkcijas $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tādas, ka visiem $m, n \in \mathbb{N}$

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

ir naturāla skaitļa kvadrāts.

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Katru uzdevumu vērtē ar 0-7 punktiem.

Ceturtdiena, 2010. gada 8. jūlijs.

4. uzdevums. Punkts P atrodas trijstūra ABC iekšpusē. Taisnes AP, BP un CP vēlreiz krusto trijstūrim ABC apvilkto riņķa līniju Γ attiecīgi punktos K, L un M. Pieskare, kas novilkta riņķa līnijai Γ punktā C, krusto taisni AB punktā S. Zināms, ka $SC = SP$. Pierādīt, ka $MK = ML$.

5. uzdevums. Katrā no sešām kastēm $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ sākotnēji atrodas pa vienai monētai. Ar tām iespējams veikt divu veidu darbības:

1: Izvēlas jebkuru netukšu kasti B_j, $1 \leq j \leq 5$, no tās izņem vienu monētu un kastē B_{j+1} ieliek divas monētas.

2: Izvēlas jebkuru netukšu kasti B_k, $1 \leq k \leq 4$, no tās izņem vienu monētu un kastes B_{k+1} (iespējams tukšas) saturu samaina vietām ar kastes B_{k+2} (iespējams tukšas) saturu.

Noskaidrojiet, vai eksistē kāda galīga šādu darbību virkne, kuras rezultātā kastes B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 būs tukšas, bet kastē B_6 būs tieši $2010^{2010^{2010}}$ monētas. (atcerieties, ka $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

6. uzdevums. Dota reālu pozitīvu skaitļu virkne $a_1, a_2, a_3, \ldots$ un naturāls skaitlis s, tādi, ka visiem $n > s$ izpildās

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

Pierādīt, ka eksistē naturāli skaitļi ℓ un N, tādi, ka $\ell \leq s$ un visiem $n \geq N$ izpildās $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$.

Risināšanas laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Katru uzdevumu vērtē ar 0-7 punktiem.