Komandu sacensības matemātikā Baltic Way 2003

Rīgā, 2. novembrī, 2003. gadā.

Darba laiks: 4.5 stundas.
Jautājumus par uzdevumiem var uzdot pirmo 30 min. laikā.

1. Ar $\mathbb{Q}_+$ apzīmēsim visu pozitīvo racionālo skaitļu kopu.
   Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$, kuras katram $x \in \mathbb{Q}_+$ vienlaicīgi apmierina nosacījumus:
   $(1) f(\frac{1}{x}) = f(x)$
   $(2) (1 + \frac{1}{x}) f(x) = f(x+1)$

2. Pierādīt, ka katrs vienādojuma $x^3 + px + q = 0$ reāls atrisinājums apmierina nevienādību $4qx \leq p^2$.

3. Doti tādi pozitīvi reāli skaitļi x, y and z, ka $xyz = 1$. Pierādīt, ka
$$(1+x)(1+y)(1+z) \geq 2\left(1 + \sqrt[3]{\frac{y}{x}} + \sqrt[3]{\frac{z}{y}} + \sqrt[3]{\frac{x}{z}}\right).$$

4. Doti pozitīvi reāli skaitļi a, b, c. Pierādīt, ka
$$\frac{2a}{a^2+bc} + \frac{2b}{b^2+ca} + \frac{2c}{c^2+ab} \leq \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}.$$

5. Virkne (a_n) ir definēta sekojoši: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = 2$ un $a_{n+1} = a_n a_{n-1}^2$ pie $n \geq 2$. Pierādīt, ka katram $n \geq 1$ izpildās
$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) < (2+\sqrt{2})a_1 a_2 \dots a_n.$$

6. Doti veseli skaitļi $n \geq 2$ un $d \geq 1$. Skaitlis d ir skaitļa n dalītājs. Doti arī tādi reāli skaitļi $x_1, x_2, \dots, x_n$, ka $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$. Pierādīt, ka ir vismaz C_{n-1}^{d-1} dažādi veidi, kā izvēlēties d indeksus $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_d \leq n$, lai izpildītos nevienādība $x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_d} \geq 0$.

7. Dota kopas $\{1, 2, 3, \dots, 10000\}$ apakškopa X ar šādu īpašību: ja a, $b \in X$ un $a \neq b$, tad $a \cdot b \notin X$. Kāds ir maksimālais elementu skaits kopā X?

8. Uz galda atrodas 2003 konfektes. Divi spēlētāji pēc kārtas izdara gājienus. Vienā gājienā var apēst vienu konfekti vai arī pusi no visu konfekšu skaita uz galda ("mazāko pusi", ja tur ir nepāra skaits konfekšu); katrā gājienā jāapēd vismaz viena konfekte. Zaudētājs ir tas spēlētājs, kurš apēd pēdējo konfekti. Kuram spēlētājam — pirmajam vai otrajam — ir uzvaroša stratēģija?

9. Ir zināms, ka n ir vesels pozitīvs skaitlis, $n \leq 144$. Var tikt uzdoti desmit jautājumi formā "Vai n ir mazāks nekā a?". Atbildes tiek dotas ar kavēšanos: atbilde uz i-to jautājumu tiek dota tikai pēc tam, kad ir uzdots $(i+1)$-ais jautājums, $i = 1, 2, \dots, 9$. Atbilde uz 10-to jautājumu tiek dota nekavējoties pēc jautājuma uzdošanas. Atrast stratēģiju, lai noteiktu n.

10. *Režģa punkts* plaknē ir punkts, kura abas koordinātes ir veseli skaitļi. Četru punktu (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4$, *smaguma centrs* ir punkts

$$(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}).$$

Ar n apzīmēsim lielāko naturālo skaitli ar šādām īpašībām: plaknē eksistē n atšķirīgi režģa punkti, tādi, ka nekādu četru šo punktu smaguma centrs neatrodas režģa punktā. Pierādīt, ka $n = 12$.

11. Vai iespējams izvēlēties 1000 punktus plaknē tā, lai vismaz 6000 attālumi starp diviem no tiem būtu savā starpā vienādi?

12. Dots kvadrāts $ABCD$. Dots malas BC iekšējs punkts M un malas CD iekšējs punkts N, pie tam $\angle MAN = 45°$. Pierādīt, ka AMN apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas uz taisnes AC.

13. Pieņemsim, ka taisnstūrī $ABCD$ pastāv vienādība $BC = 2 \cdot AB$. Punkts E ir BC viduspunkts, bet punkts P ir patvaļīgs AD iekšējs punkts. Punkti F un G ir to perpendikulu pamati, kuri vilkti no A pret BP un no D pret CP. Pierādīt, ka punkti E, F, P, G atrodas uz vienas riņķa līnijas.

14. Pieņemsim, ka dots patvaļīgs trijstūris ABC un AMB, BNC, CKA ir regulāri trijstūri, kas atrodas ārpus ABC. Caur MN viduspunktu ir konstruēts perpendikuls pret AC; līdzīgi konstruēti perpendikuli caur NK viduspunktu, resp. KM viduspunktu pret AB, resp. BC. Pierādīt, ka šie trīs perpendikuli krustojas vienā punktā.

15. Riņķī ievilkta četrstūra diagonāļu AC un BD krustpunkts ir P. Riņķa līnija, kura iet caur P, pieskaras malai CD tās viduspunktā M un krusto nogriežņus BD un AC attiecīgi punktos Q un R. Punkts S ir tāds nogriežņa BD punkts, ka $BS = DQ$. Taisnei AB paralēla taisne, kas iet caur punktu S, krusto AC punktā T. Pierādīt, ka $AT = RC$.

16. Atrast visus tādus pozitīvu veselu skaitļu pārus (a, b), ka $a - b$ ir pirmskaitlis un ab ir vesela skaitļa kvadrāts.

17. Visi pozitīva vesela skaitļa n dalītāji ir sakārtoti masīvā augošā secībā. Marijai jāuzraksta programma, kura patvaļīgi izvēlētam dalītājam $d > 1$ noskaidro, vai tas ir pirmskaitlis. Pieņemsim, ka skaitlim n ir k dalītāji, kas nav lielāki par d. Marija uzskata, ka pietiek pārbaudīt d dalāmību ar $\lceil k/2 \rceil$ pirmajiem n dalītājiem: ja starp tiem ir d dalītājs, kas lielāks nekā 1, tad d ir salikts skaitlis, pretējā gadījumā d ir pirmskaitlis. Vai Marijai taisnība?

18. Katrs vesels skaitlis ir nokrāsots kādā no četrām krāsām: ZILĀ, ZAĻĀ, SARKANĀ vai DZELTENĀ. Vai to var izdarīt tā, lai, ja a, b, c, d ne visi ir 0, bet visi ir nokrāsoti vienā un tai pašā krāsā, tad $3a - 2b \neq 2c - 3d$?

19. Doti pozitīvi veseli skaitļi a un b. Pierādīt, ka, ja $a^3 + b^3$ ir vesela skaitļa kvadrāts, tad $a + b$ nav divu dažādu pirmskaitļu reizinājums.

20. Dots tāds vesels pozitīvs skaitlis n, ka visu n dalītāju (izņemot pašu n) un visu šo dalītāju skaita summa ir vienāda ar n. Pierādīt, ka $n = 2m^2$, kur m ir vesels skaitlis.