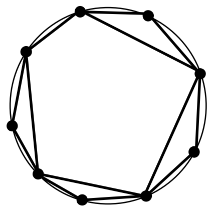
Jauno matemātiķu konkurss
3.kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Piemēram, $8\cdot((7+6)\cdot5\cdot4+3-2-1-9)=2008$.

2. Skat., piem., zīm.



3. Pieņemsim, ka visos 17 maisiņos ir pa 4 āboliem; tad pavisam kopā būtu 17·4=68 āboli. Tātad vēl 113-68=45 āboli jāizvieto pa dažiem maisiņiem vienādā skaitā. Tā kā 45=1·45=3·15=5·9, tad pavisam iegūstam 6 dažādas x vērtības:

1) 1 maisiņā pieliekot visus 45 ābolus, iegūstam 16 maisiņus ar 4 āboliem katrā un 1 maisiņu ar 49 āboliem (x=49);

2) 3 maisiņos pieliekot pa 15 āboliem, iegūstam 14 maisiņus ar 4 āboliem katrā un 3 maisiņu ar 19 āboliem katrā (x=19);

3) 15 maisiņos pieliekot pa 3 āboliem, iegūstam 2 maisiņus ar 4 āboliem katrā un 15 maisiņu ar 7 āboliem katrā (x=7);

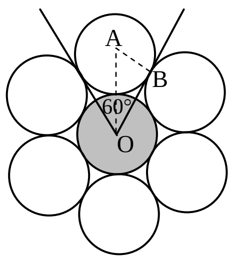
4) 5 maisiņos pieliekot pa 9 āboliem, iegūstam 12 maisiņus ar 4 āboliem katrā un 5 maisiņu ar 13 āboliem katrā (x=13);

5) 9 maisiņos pieliekot pa 5 āboliem, iegūstam 8 maisiņus ar 4 āboliem katrā un 9 maisiņu ar 9 āboliem katrā (x=19).

Nevar 45 maisiņos pielikt pa 1 ābolam katrā, jo kopējais maisiņu skaits ir 17<45. Citos veidos skaitli 45 nevar izteikt kā naturālu skaitļu reizinājumu, tātad citu iespējamo x vērtību nav.

4. Prasītā veidā var novietot ne vairāk kā 6 apļus (skat. zīm.). Ievērosim, ka viens zaļais aplis „aizņem" 60° lielu sektoru (šajā sektorā nevar ietilpt neviens cits zaļais aplis, kas arī pieskaras sarkanajam aplim). Tā kā pilns aplis ir 360°, tad to var sadalīt 360°:60°=6 šādos sektoros, katrā no kuriem var ievietot ne vairāk kā vienu zaļo apli.

Piezīme. Pilnam atrisinājumam nepieciešams arī pierādīt, ka apskatāmā sektora lielums ir 60°. Tas ir viegli izdarāms, izmantojot pieskares īpašības un sakarības taisnleņķa trijstūrī OAB.



5. Ievērosim, ka uzraksti uz 2. un 3. istabu durvīm abi reizē ir vai nu patiesi, vai aplami (tie abi izsaka vienu un to pašu apgalvojumu). Taču tie nevar būt aplami: ja uzraksts uz 3.istabas durvīm ir aplams, tad īstenībā 3.istabā tīģera nav, tāpēc tajā istabā jābūt princesei. Bet zināms, ka uz tās istabas durvīm, kur atrodas princese, uzraksts ir patiess, tāpēc 3. istabā princese neatrodas. Tā kā katrā istabā jābūt vai nu tīģerim, vai princesei, esam ieguvuši pretrunu (jo 3.istabā nevar būt ne tīģeris, ne princese), tāpēc nevar uzraksts uz 3.istabas (un līdz ar to arī uz 2.istabas) durvīm nevar būt aplams, tātad tam jābūt patiesam. Tā kā vismaz viens uzraksts ir aplams, tad uzraksts uz 1.istabas durvīm ir aplams. Tātad 3.istabā atrodas tīģeris (tā rakstīts uz abām „patiesajām" plāksnītēm), 2.istabā atrodas princese (uzraksts uz 2.istabas durvīm ir patiess, savukārt uzraksts uz 1.istabas durvīm, kas apgalvo, ka tīģeris ir 2.istabā, ir aplams, tāpēc tīģeris nav 2. istabā), un acīmredzot 1.istabā ir tīģeris, jo tikai vienā istabā ir princese, bet divās pārējās – pa tīģerim.