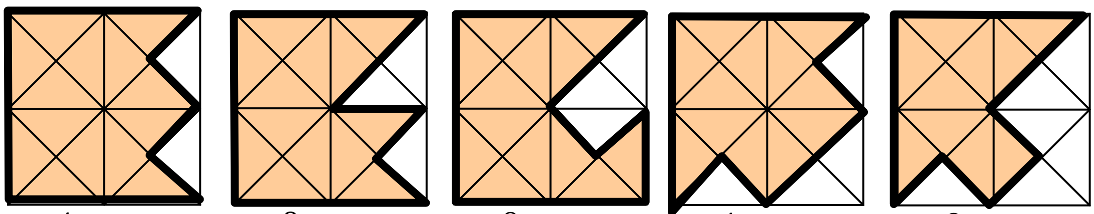
Jauno matemātiķu konkurss 2011./12. m.g.

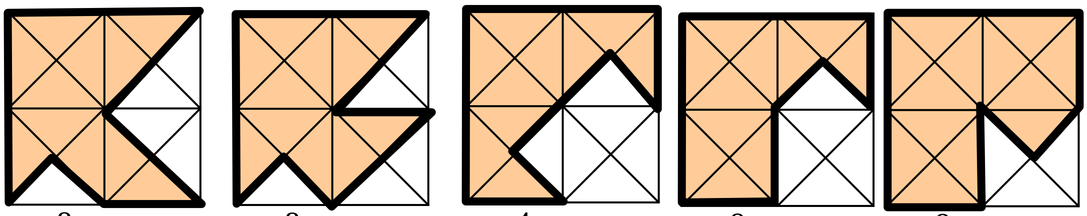
2. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. Trīs *obligātajās* kauzdītēs kopā ir 6,66 Ls. Katras kaudzītes izveidošanai mazākais nepieciešamais monētu skaits ir 4: 1,32 Ls=1 Ls + 20 sant. +10 sant. + 2 sant., 2,13 Ls=2 Ls+10 sant. +2 sant.+1 sant., 3,21 Ls=2 Ls+1 Ls+20 sant.+1 sant. Taču šādā gadījumā netiek izmantotas monētas 50 sant. un 5 sant. Tāpēc, lai izveidotu *obligātās* kaudzītes, būs jāizmanto vismaz 14 monētas – vienu 1 Ls monētu jāaizstāj ar divām 50 sant. monētām, un vienu 10 sant. monētu – ar divām 5 sant. monētām. Vēl sešas monētas Mārtiņš var izvēlēties patvaļīgi, tāpēc viņš ņemt visas 2 Ls monētas, tādējādi kopā iegūt 6,66 Ls+6·2 Ls=**18,66 Ls**.

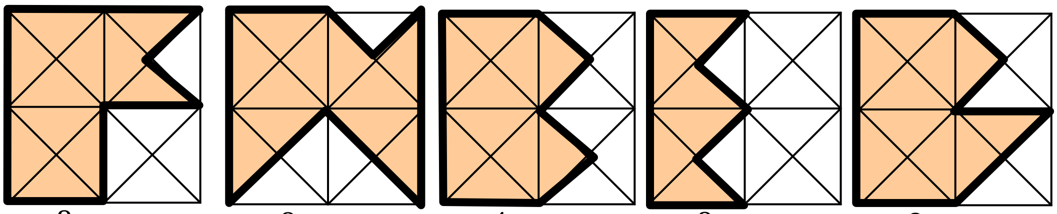
2. Pavisam dotajā režģī var uzzīmēt 56 dažādus septiņstūrus; skat. zīmējumus. Seši no tiem ir simetriski, tos var pagriezt 4 dažādos veidos, vienu septiņstūri dotajā režģī var uzzīmēt 16 veidos, bet pārējos septiņstūrus – 8 veidos. Skaitlis zem katra septiņstūra norāda, cik veidos to var uzzīmēt šajā režģī. Piemēram, 8 veidi tiek iegūti vispirms doto figūru attēlojot simetriski vienai no kvadrāta simetrijas asīm, un pēc tam abas iegūtās figūras pagriežot par 90°, 180°, 270°. Ja dotajai figūrai nav nevienas simetrijas ass, visi 8 iegūtie atēli būs dažādi.



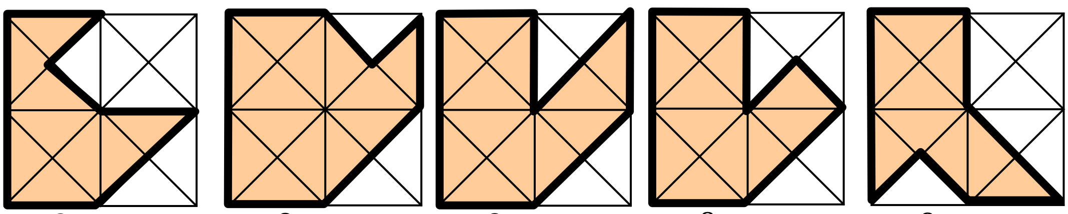
4 8 8 4 8



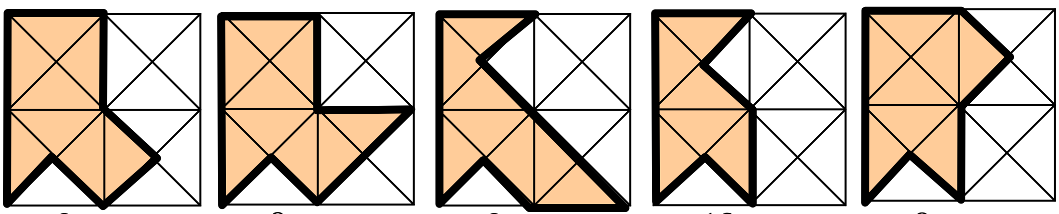
8 8 4 8 8



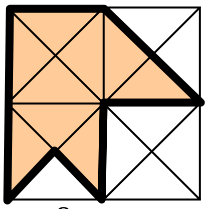
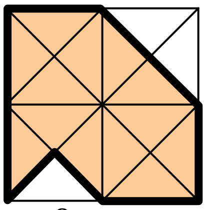
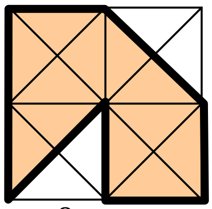
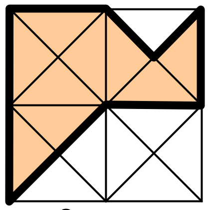
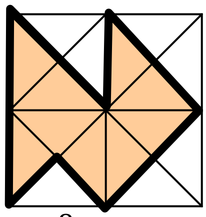
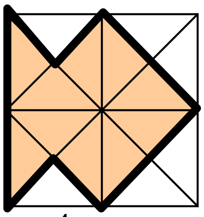
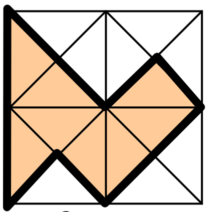
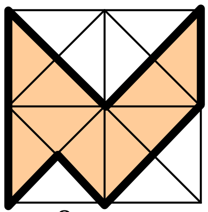
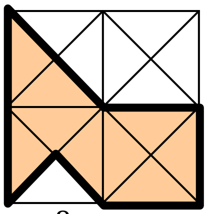
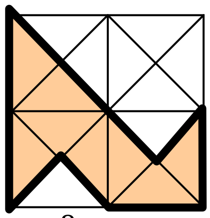
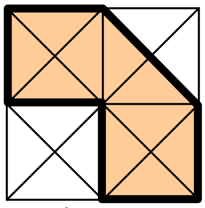
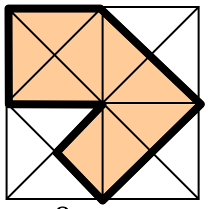
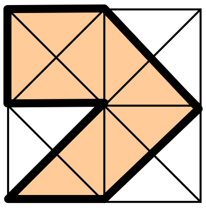
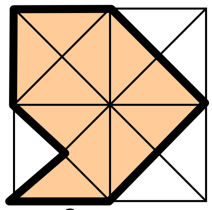
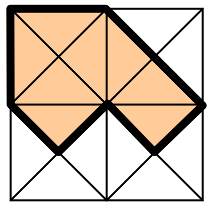
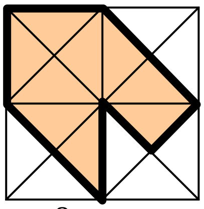
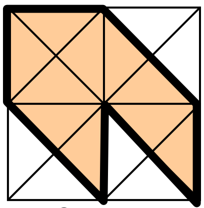
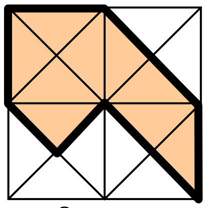
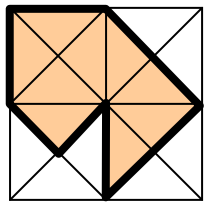
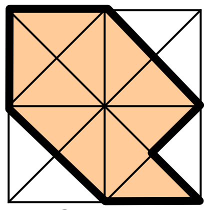
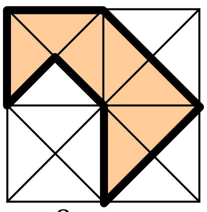
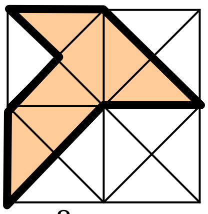
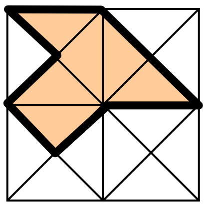
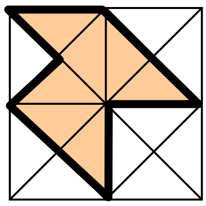
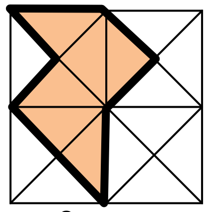
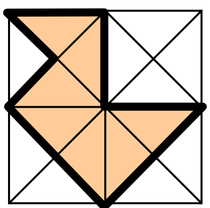
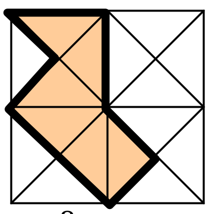
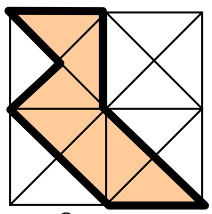
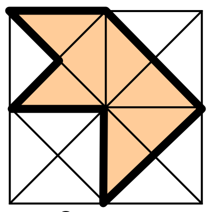
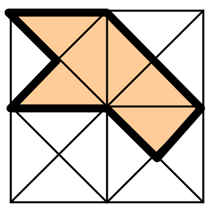
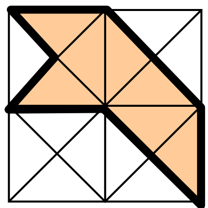
8 8 4 8 8



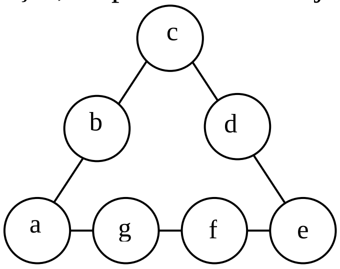
8 8 8 8 8



8 8 8 16 8


8

8

8

8

8

4

8

8

8

8

4

8

8

8

8

8

8

8

8

8

8

8

8

8

8

8

8

8

8

8

8

3. Apzīmēsim aplīšos ierakstītos skaitļus, kā parādīts 1. zīmējumā.



1. zīm.

Tad $$a+b+c=c+d+e=a+g+f+e=s,$$

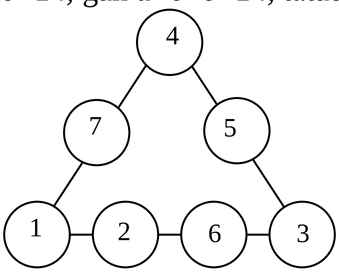
$$a+b+c+d+e+f+g=1+2+3+4+5+6+7=28,$$

savukārt $$3s=(a+b+c+d+e+f+g)+(a+c+e)=28+(a+c+e).$$

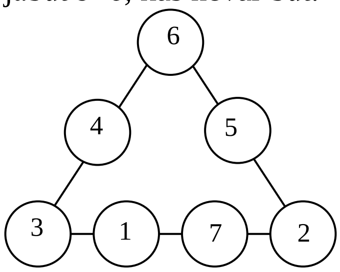
Tātad $28+(a+c+e)$ jādalās ar 3. $a+c+e$ mazākā vērtība var būt 6=1+2+3, bet lielākā 18=5+6+7. Balstoties uz šiem secinājumiem, tabulā apkoposim iespējamās s vērtības.

3*s*=28+*a*+*c*+*e*	***s***	***a*+*c*+*e***
36	12	8
39	13	11
42	14	14
45	15	17

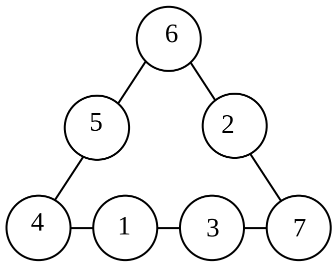
Vērtībām s=12, s=13 un s=15 piemēri doti attiecīgi 2., 3. un 4. zīmējumā. Gadījumā s=14 gan $a+b+c$=14, gan $a+c+e$=14, tātad jābūt $b=e$, kas nevar būt.



2. zīm.



3. zīm.



4. zīm.

Tātad uz vienas trijstūra malas uzrakstīto skaitļu summas var būt 12, 13 vai 15.

4. Skaitlim $8192=2^{13}$ *garums* ir 13. Ja kādu no pirmreizinājiem 2 aizstāsim ar 3 vai lielāku skaitli, reizinājums būs vismaz $2^{12}\cdot 3=12288$ – vismaz piecciparu skaitlis. Arī $2^{14}>9999$. Tātad četrciparu skaitlim lielākais *garums* ir 13, un ir tikai viens tāds skaitlis.

5. a) Paņemot 77 bumbiņas, var gadīties, ka ir paņemtas visas 30 zilās, visas 30 dzeltenās, visas 10 baltās un melnās bumbiņas un tikai 7 sarkanās bumbiņas. Tāpēc, lai noteikti būtu vismaz 8 darkanās bumbiņas, no maisa jāizvelk 78 bumbiņas.

b) Ja tiks izvilktas 49 bumbiņas, var gadīties, ka ir paņemtas 13 zilās, 13 sarkanās, 13 dzeltenās un visas 10 baltās un melnās bumbiņas. Tāpēc, lai noteikti būtu vismaz 14 bumbiņas vienā krāsā, no maisa jāpaņem 50 bumbiņas.

c) Nav zināms, cik tieši melnās bumbiņas ir maisā: varbūt ir tikai viena. Tāpēc paņemot mazāk nekā 100 bumbiņas, var gadīties, ka vienīgā melnā bumbiņa palikusi maisā. Tāpēc, lai noteikti būtu izvilkta arī melnā bumbiņa, no maisa jāizņem visas 100 bumbiņas.