Jauno matemātiķu konkurss 2011./12. m.g.

4. kārtas uzdevumu atbildes

1. Atbilde: a) Piemēram, 102, 204, 306, 816, 1020 u.c.

b) Piemēram, 625, 3125, 9375, 6250 u.c.

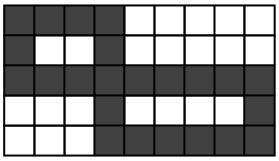
Risinājums. Meklējamo skaitli apzīmēsim ar $\overline{aB} = a\cdot 1\underbrace{0...0}_{k\ \ nulles} + B$, kur a ir skaitļa pirmais cipars, bet B ir skaitlis, kas paliek, nosvītrojot pirmo ciparu a (pieņemsim, ka tam ir k cipari).

Tad **a)** gadījumā ir spēkā vienādība $\overline{aB} = a\cdot 1\underbrace{0...0}_{k\ \ nulles} + B = 51\cdot B$ jeb $a\cdot 1\underbrace{0...0}_{k\ \ nulles} = 50\cdot B$. Tātad B ir jābūt pāra skaitlim, bet a var būt jebkurš cipars no 1 līdz 9. Piemēram, ja B vērtības 2 (tad meklējais skaitlis ir 102), 4 (204), 6 (306), 8 (408), 10 (510), 12 (612), 14 (714), 16 (816), 18 (918), kā arī visi šie skaitļi, pareizināti ar 10, 100, 1000 utt.

b) gadījumā jāipzpildās vienādībai $\overline{aB} = a\cdot 1\underbrace{0...0}_{k\ \ nulles} + B = 25\cdot B$ jeb $a\cdot 1\underbrace{0...0}_{k\ \ nulles} = 24\cdot B = 3\cdot 8\cdot B$.

Tā kā skaitlis 10…0 nedalās ar 3, tad a jādalās ar 3 (tātad a var būt 3, 6 vai 9), bet B jādalās ar 5). Ja a=3, tad B=125 un meklējamais skaitlis ir 3125 (kā arī 31250, 312500 utt.), ja a=6, tad B=25 un meklējamais skaitlis ir 625 (kā arī 6250, 62500 utt.), ja a=9, tad B=375 un meklējamais skaitlis ir 9375 (kā arī 93750, 937500 utt.).

2. a) Jā, var, skat., piem., 1. zīm.



1. zīm.

b) Nē, nevar. Pieņemsi, ka izdevies nokrāsot 23 rūtiņas, lai katrai būtu nepāra skaits kaimiņu. Saskaitīsim **visas rūtiņu malas, kas kopīgas divām rūtiņām**, ieskaitot katru malu tik reizes, cik rūtiņām tā pieder. Tā kā ir 23 (nepāra skaits) rūtiņu, un katrai ir nepāra skaits kaimiņu (tātad no katras rūtiņas tiek ieskaitīts nepāra skaits malu), tad kopā iegūstam nepāra skaitu. Taču katra skaitāmā mala ir kopīga tieši divām kaimiņu rūtiņām, tātad ir ieskaitīta tieši divas reizes. Tāpēc to kopējam skaitam jābūt pāra skaitlim. Bet viens un tas skaits nevar būt reizē pāra un nepāra skaitlis, tātad tāda situācija nav iespējama.

3. a) Sadalīsim visus izvēlētos skaitļus septiņās grupās:

1. grupā – skaitļi, kas dalās ar 7;
2. grupā – skaitļi, kas dod atlikumu 1, dalot ar 7;
3. grupā – skaitļi, kas dod atlikumu 2, dalot ar 7;
4. grupā – skaitļi, kas dod atlikumu 3, dalot ar 7;
5. grupā – skaitļi, kas dod atlikumu 4, dalot ar 7;
6. grupā – skaitļi, kas dod atlikumu 5, dalot ar 7;
7. grupā – skaitļi, kas dod atlikumu 6, dalot ar 7.

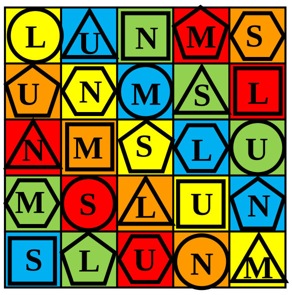
Tā kā $7\cdot 14=98<100$, tad kādā no grupā būs vismaz 15 skaitļi, tie der par meklētajiem: ja divi skaitļi dod vienādu atlikumu, dalot ar 7, tad to starpība dalās ar 7.

b) Piemēram, apskatot visus naturālos skaitļus no 1 līdz 100, starp tiem nav 16 tādu, kas dod vienādu atlikumu, dalot ar 7, tātad ne vienmēr varēs atrast 16 skaitļus ar minēto īpašību.

4. Apzīmēsim komandas dalībnieku skaitu ar *n*, ar *k* apzīmēsim, cik pilnas reizes tika apskriets stadions, līdz stafete beidzās.

Tad $75 \cdot n = 330 \cdot x$ jeb $5 \cdot n = 22 \cdot x$ pie tam *x* ir mazākais no skaitļiem, ar kuru šī vienādība ir patiesa. Tātad $x=5$ un $n=22$. Tātad komandā ir 22 dalībnieki, pavisam kopā viņi noskrēja 330 m ·5=1650 m=1 km 650 m. Visi stafetes kociņa nodošanas punkti ir dažādi, jo pretējā gadījumā finišs tiktu sasniegts jau ātrāk, tātad pavisam ir 22 šādi punkti (ieskaitot startu/finišu), pie tam tie ir izvietoti pa stadionu vienādos attālumos ik pēc 330 m : 22=15 m.

5. Skat., piem., 2. zīm.



2. zīm.