Jauno matemātiķu konkurss 2012./13. m.g.
1. kārtas uzdevumu atrisinājumi

1. ***Aritmētiskais šifrs***

Tā kā D+D=D, tad **D=0**.

Ja saskaitot divus četrciparu skaitļus summā tika iegūts piecciparu skaitlis, tad summas pirmais cipars var būt tikai 1, tātad **E=1**.

Esam ieguvuši, ka ABC0+AB10=10CA0. Tātad **A=5**: ja A>5, tad A+A>10; ja A<5, tad A+A≤8 un pārnesums no iepriekšējās šķiras nevar pārsniegt 1, tāpēc summa būs ≤9.

No 5BC0+5B10=10C50 iegūstam, ka **C=4** un **B=2** un aizšifrētais piemērs bija **5240+5210=10450**.

2. ***Neparastais bankomāts***

a) Jā, var. Ievērosim, ka Ellai visu laiku ir tikai 2 banknotes – sākumā viņai bija divas banknotes, bet ievadot bankomātā divas banknotes, tas atgriež atkal tikai divas banknotes. Tātad nākamjā maiņā var izmantot tikai tās divas banknotes, kas tika iegūtas iepriekšējā maiņā.

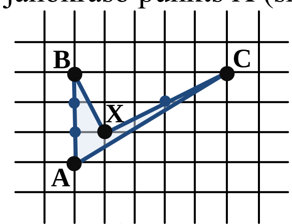
Pieraksts $(x, y) \to (a, b)$ nozīmē, ka ievadot banknotes ar vērtībam x un y, bankomāts izdod banknotes ar vērtībām (a, b).

(1, 1)→(3, 1), (1, 3)→(5, 1), (1, 5)→(7, 3), (3, 7)→(**13**, 1).

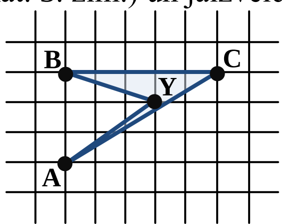
b) Ievērosim, ka, ja x un y abi ir nepāra skaitļi, tad gan $(2\cdot x+y)$, gan $(2\cdot x-y)$, $(y-2\cdot x)$ būs nepāra skaitļi. Tā kā Ellai sākumā abas banknotes bija 1 (nepāra skaitlis) salāra vērtībā, tad arī vairākkārtēju maiņu rezultātā viņa var iegūt **tikai** banknotes, kuru vērtība ir nepāra skaits salāru. Tāpēc 2 salāru banknote nekad netiks iegūta.

3. ***Mazākais četrstūris***

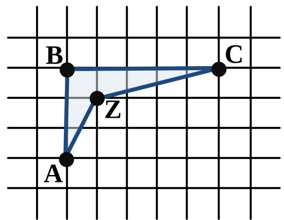
1. risinājums. Lai iegūtu četrstūri ar mazāko iespējamo laukumu, ceturtajai virsotnei jātrodas trijstūra ABC iešpusē, pie tam tā, lai četrstūris veidotos no trijstūra ABC izgriežot trijstūri ar vislielāko iespējamo laukumu. Tā kā ir jāpievieno tikai viena jauna virsotne, tad izgrieztajam trijstūrim būs divas sākotnējā trijstūra ABC virsotnes (jeb viena trijstūra ABC mala). Apskatīsim, kādi ir lielākie iespējamie izgrieztie trijstūri, kam viena no malām ir AB, BC vai AC un trešā virsotne ir rūtiņas virsotne trijstūra ABC iekšpusē: 3. zīm. tiek izgriezts trijstūris BCX, iegūtā četrstūra ABXC laukums ir 2,5 rūtiņas; 4. zīm. tiek izgriezts trijstūris ABY, iegūtā četrstūra AYBC laukums ir 3 rūtiņas; 5. zīm. tiek izgriezts trijstūris ACZ, iegūtā četrstūra ABCZ laukums ir 4 rūtiņas. Tātad, lai iegūtu četrstūri ar vismazāko laukumu, kā ceturtais jānokrāso punkts X (skat. 3. zīm.) un jāizveido četrstūris ABXC.



3. zīm.



4. zīm.



5. zīm.

2. risinājums. Daudzstūriem, kuru visas virsotnes ir rūtiņu virsotnēs, laukumu var aprēķināt pēc Pīka formulas $S = i + \frac{r}{2} - 1$, kur i ir daudzstūra iekšpusē esošo rūtiņu virsotņu skaits, r – uz daudzstūra kontūra esošo rūtiņu virsotņu skaits (ieskaitot arī daudzstūra virsotnes). Tātad, lai četrstūra laukums būtu mazākais iespējamais, tā iekšpusē nedrīkst atrasties neviena rūtiņas virsotne, kā rī uz kontūra jābūt iespējami maz rūtiņu virsotnēm. Tā kā iegūtajam četrstūrim divas no malām būs trijstūra ABC malas, tad tās būs malas AC (uz tās nav nevienas rūtiņu virsotnes, neskaitot A un C) un mala AB (uz tās bez virsotnēm A un B ir vēl divas rūtiņu virsotnes bet uz malas BC bez virsotnēm ir vēl četras citas rūtiņu virsotnes). Taču mēģinot izvietot ceturto punktu X tā, lai četrstūra ABXC iekšpusē nebūtu neviena rūtiņas virsotne, nav iespējams panākt lai ne mala BX, ne mala CX neietu ne caur vienu citu rūtiņas virsotni. Tātad uz četrstūra ABXC kontūra ir vismaz 7 rūtiņu virsotnes (4 četrstūra virsotnes + 2 punkti uz malas AB + 1 punkts uz malas XC).

Ja kā četrstūra malas būtu malas BC un AC, tad uz kontūra būtu vismaz 8 rūtiņu virsotnes, tātad četrstūra ABXC laukums vienalga ir mazāks.

Tātad iegūstamā četrstūra laukums ir vismaz $0+\frac{7}{2}-1=2{,}5$ rūtiņas. Tas, ka var iegūt četrstūri ar laukumu 2,5 rūtiņas, parādīts 1. zīm.

4. ***Par pankūkām***

Pankūku dalīšanu varētu veikt sekojoši.

Vispirms pankūku ar diametru 11 cm uzliekam uz jebkura šķīvja (3 iespējas). Pēc tam 12 cm lielo pankūku noliekam uz viena no tiem šķīvjiem, uz kura nav nolikta 11 cm lielā pankūka (2 iespējas). Tad izvēlamies vienu no diviem šķīvjiem, uz kura nav 12 cm lielā pankūka, un uzliekam 13 cm lielo pankūku. Tā pēc kārtas izvēlamies, uz kura šķīvja tiks uzlikta 14 cm, 15 cm un 16 cm lielās pankūkas (katrai būs 2 iespējas).

Tātad pavisam pankūkas pa šķīvjiem var sadalīt $3\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=96$ veidos. Taču starp šiem veidiem ir arī tādi, kad viens no šķīvjiem ir palicis tukšs. Tas ir iespējams tikai tādā gadījumā, ja uz viena šķīvja ir pankūkas 11 cm, 13 cm, 15 cm, bet uz otra – 12 cm, 14 cm, 16 cm. Pie tam šie gadījumi pa trīs šķīvjiem var būt izkārtojušies 6 veidos.

Tātad uzdevuma prasībām atbilstošo sadalījumu skaits ir 96-6=**90**.

Savukārt, ja nebūtu svarīga šķīvju secība, t.i., svarīgi tikai „pankūku komplekti" (piemēram, ir iepriekšēja vienošanās, ka Didzim vienmēr tiek šķīvis, uz kura ir 11 cm pankūka, mammai – šķīvis, uz kura ir 12 cm pankūka, bet tētim – trešais šķīvis), tad uzdevuma atbilde būtu 90:6=15 veidos, jo katru „pankūku komplektu" pa trīs šķīvjiem var sadalīt $3\cdot2\cdot1=6$ veidos.

5. ***Noslēpumainie mākslinieki***

Tā kā Baltiņam nav blondi mati un viņš nav arī tumšmatis (jo tumšmatis bija otrs runātājs), tad Baltiņam ir rudi mati.

Tā kā Melnītim nav tumši mati un nav arī rudi mati (jo rudi mati ir Baltiņam), tad Melnītim ir blondi mati.

No tā savukārt seko, ka gleznotājs Rudais ir tumšmatis.