MĀJAS DARBA ATRISINĀJUMI

1. uzdevums.
No 52 kāršu kavas brīvi pēc kārtas izvelk divas kārtis. Kāda ir varbūtība tam, ka otrās kārts stiprums būs lielāks nekā pirmās kārts stiprums? (Kāršu stiprumi ir augošā secībā: 2, 3, ..., 10, kalps, dāma, kungs, dūzis.)

Atrisinājums:
Pieņemsim, ka izvelkam pirmo kārti no kāršu kavas un atliekam to malā, neskatoties tās stiprumu.
Apzīmēsim ar Ω iznākumu telpu, kas saistīta ar otrās kārts izvilkšanu. Jebkurš iznākums ω no telpas Ω pieder vienam no trim saliktiem savstarpēji nesavienojamiem notikumiem (Ω apakškopām):
A – „kārts stiprums ir lielāks nekā pirmās kārts stiprumu",
B – „kārts stiprums ir mazāks nekā pirmās kārts stiprumu",
C – „kārts stiprums sakrīt ar pirmās kārts stiprumu".
Šie notikumi veido pilnu grupu $A \cup B \cup C = \Omega$.
Simetrijas dēļ patiesa ir vienādība $P(A) = P(B) = P$. (Paskaidrosim to. Vienlīdziespējami ir notikumi *A* un *B*, jo jebkuram iznākumam no *A* atbilst vienlīdziespējams iznākums no *B*. Piemēram, ja pirmā izvilktā kārts ir septiņnieks, tad stiprākas par to ir 28 kārtis. Atbilstoši, ja pirmā izvilktā kārts ir astoņnieks, tad vājākas par to arī ir 28 kārtis. Šāda simetrija pastāv jebkuram iznākumam).
Pirms otrās kārts izvilkšanas kāršu kava satur 51 kārti. Trīs kārtis pēc stipruma atbilst pirmajai izvilktajai kārtij. Tātad $P(C) = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$. Tā kā *A*, *B* un *C* veido pilnu nesavienojamu notikumu grupu, tad $P(A) + P(B) + P(C) = P(\Omega)$ jeb $P + P + \frac{1}{17} = 1$. No kurienes iegūsim $P = \frac{8}{17}$.
Atbilde: Varbūtība tam, ka otrās kārts stiprums būs lielāks ir $\frac{8}{17}$.

2. uzdevums.
Jānis un Gunta ir ekologi – ķīmiķi. Viņu darba līgumos ir arī šāds punkts: ķīmiskās trauksmes gadījumos viņiem steigšus jāierodas darbā arī brīvajā laikā. Tādēļ viņu tuvumā visu laiku jābūt mobilajam telefonam. Jānis ir apzinīgs darbinieks un 90% no visa brīvā laika telefons ir viņa tuvumā. Gunta nav tik apzinīga – viņai telefons ir tuvumā 50% no brīvā laika. Jāņa un Guntas ierašanās darbā pēc izsaukuma ir neatkarīgi notikumi.

1) Kāda ir varbūtība tam, ka pēc izsaukuma kaut viens no viņiem ieradīsies darbā laikus?
2) Lai palielinātu drošību ķīmiskas avārijas gadījumā, Jāņa un Guntas komandai pievieno Miķeli, kurš (neatkarīgi no Guntas un Jāņa) var ierasties laikus darbā 70% gadījumu. Par cik palielinās varbūtība tam, ka kaut viens no komandas pēc izsaukuma ieradīsies darbā laikus?
3) Ja Guntu izslēdz no komandas, tad kāda būs varbūtība tam, ka kāds no komandas pēc izsaukuma ieradīsies darbā laikus?

Atrisinājums:

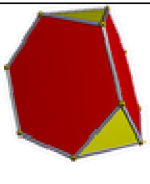
1) Apzīmēsim notikumus:
   J – „Jānis saņem izsaukumu un ierodas darbā laikus",
   G – „Gunta saņem izsaukumu un ierodas darbā laikus"
   Mums jāatrod $P(J \cup G)$. Pēc varbūtību saskaitīšanas teorēmas:
   $$P(J \cup G) = P(J) + P(G) - P(J \cap G).$$

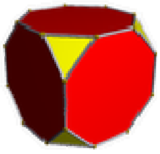
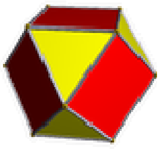
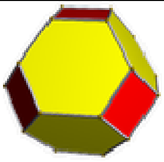
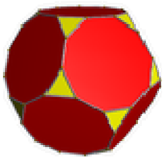
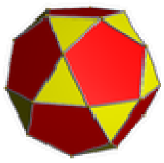
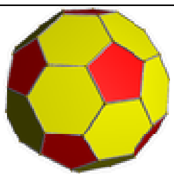
Pēc dotā $P(J)=0{,}9$, $P(G)=0{,}5$, bet neatkarības dēļ $P(J\cap G)=P(J)\cdot P(G)=0{,}9\cdot 0{,}5=0{,}45$. Tātad $P(J\cup G)=0{,}9+0{,}5-0{,}45=0{,}95.$

2) Apzīmēsim papildus šādu notikumu:
   M – „Miķelis saņem izsaukumu un ierodas darbā laikus"
   Atradīsim $P(J\cup G\cup M)$. Pēc varbūtības saskaitīšanas teorēmas trim kopumā neatkarīgiem notikumiem iegūsim ($P(M)=0{,}7$ pēc dotā):
   $$P(J\cup G\cup M)=P(J)+P(G)+P(M)-P(J\cap G)-P(J\cap M)-P(G\cap M)+P(J\cap G\cap M)=$$
   $$=P(J)+P(G)+P(M)-P(J)\cdot P(G)-P(J)\cdot P(M)-P(G)\cdot P(M)+P(J)\cdot P(G)\cdot P(M)=$$
   $$=0{,}9+0{,}5+0{,}7-0{,}9\cdot 0{,}5-0{,}9\cdot 0{,}7-0{,}5\cdot 0{,}7+0{,}9\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7=0{,}985.$$
   Varbūtība tam, ka kaut viens no Jāņa, Guntas vai Miķeļa komandas ieradīsies darbā laikus ir par $\Delta=0{,}985-0{,}95=0{,}035$ lielāka nekā tad, ja komandā nebūtu Miķelis.
3) Līdzīgi kā 1. gadījumā, ja Guntas vietā ir Miķelis, tad pēc varbūtības saskaitīšanas teorēmas neatkarīgiem notikumiem $P(J\cup M)=P(J)+P(M)-P(J)\cdot P(M)=0{,}9+0{,}7-0{,}9\cdot 0{,}7=0{,}97$
   Piezīme: Ievērojot, ka $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ un $\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$, meklētās varbūtības var atrast arī citādāk, izmantojot teorēmu par pretējā notikuma varbūtību un teorēmu par neatkarīgiem notikumiem:
   1) $P(J\cup G)=1-P(\overline{J}\cap\overline{G})=1-P(\overline{J})\cdot P(\overline{G})=1-(1-0{,}9)\cdot(1-0{,}5)=1-0{,}1\cdot 0{,}5=0.95$
   2) $P(J\cup G\cup M)=1-P(\overline{J}\cap\overline{G}\cap\overline{M})=1-P(\overline{J})\cdot P(\overline{G})\cdot P(\overline{M})=1-(1-0{,}9)\cdot(1-0{,}5)\cdot(1-0{,}7)=0{,}985$
   3) $P(J\cup M)=1-P(\overline{J}\cap\overline{M})=1-P(\overline{J})\cdot P(\overline{M})=1-(1-0{,}9)\cdot(1-0{,}7)=0{,}97$

3. uzdevums.
Apskati visus pusregulāros daudzskaldņus, kurus var iegūt no regulārajiem daudzskaldņiem, tos nošķeļot.
1) Apraksti, kādā veidā katrs no tiem iegūstams.
2) Sameklē literatūrā, internetā vai citur, kā sauc katru no tiem.
3) Saskaiti, cik katram no tiem ir virsotņu, šķautņu un skaldņu. Pārbaudi, vai ir spēkā Eilera formula.
4) Izveido modeli vismaz vienam no tiem. Nofotografē savu modeli un pievieno bildes mājas darba risinājumam, vai atnes savu modeli kopā ar uzdevumu risinājumiem un nākamo MMU nodarbību.

Atrisinājums.
Tabulā apkopoti visi pusregulārie daudzskaldņi, ko var iegūt, nošķeļot regulāros daudzskaldņus.

Zīmējums	**Nosaukums**	**Kā iegūts** (a – sākotnējā regulārā daudzskaldņa šķautnes garums)	**Virsotņu skaits V, cik šķautnes iziet no katras virsotnes *k***	**Skaldņu skaits F**	**Šķautņu skaits E, šķautnes garums *l*** (a – sākotnējā regulārā daudzskaldņa šķautnes garums)	**Eilera formula V+F-E=2**
	**Nošķelts tetraedrs**	No **tetraedra** katras virsotnes nošķeļot piramīdu ar sānu šķautnes garumu $\frac{1}{3}a$	V=12, k=3	F=8, 4 regulāri trijstūri, 4 regulāri sešstūri	E=18, $l=\frac{1}{3}a$	12+8-18=2

	**Nošķelts kubs**	No **kuba** katras virsotnes nošķeļot piramīdu ar sānu šķautnes garumu $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a$	V=24, k=3	F=14, 8 regulāri trijstūri, 6 regulāri astoņstūri	E=36, $l=(\sqrt{2}-1)a$	24+12-36=2
	**Kuboktaedrs**	No **kuba** (vai **oktaedra**) katras visrsotnes noškeļot piramīdu ar sānu šķautnes garumu $\frac{1}{2}a$	V=12, k=4	F=14, 8 regulāri trijstūri, 6 kvadrāti	E=24, $l=\frac{\sqrt{2}}{2}a_{kub}=\frac{1}{2}a_{okt}$	12+14-24=2
	**Nošķelts oktaedrs**	No **oktaedra** katras virsotnes nošķeļot piramīdu ar sānu šķautnes garumu $\frac{1}{3}a$	V=24, k=3	F=14, 6 kvadrāti, 8 regulāri sešstūri	E=36, $l=\frac{1}{3}a$	24+12-36=2
	**Nošķelts dodekaedrs**	No **dodekaedra** katras virsotnes nošķeļot piramīdu ar sānu šķautnes garumu $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)a$	V=60, k=3	F=32, 20 regulāri trijstūri, 12 regulāri desmitstūri	E=90, $l=\frac{\sqrt{5}}{5}a$	60+32-90=2
	**Ikosidodekaedrs**	No **dodekaedra** (vai **ikosaedra**) katras visrsotnes nošķeļot piramīdu ar sānu šķautnes garumu $\frac{1}{2}a$	V=30, k=4	F=32, 20 regulāri trijstūri, 12 regulāri piecstūri	E=60, $l=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)a_{dodek}=$ $=\frac{1}{2}a_{ikos}$	30+32-60=2
	**Nošķelts ikosaedrs**	No **ikosaedra** katras virsotnes nošķeļot piramīdu ar sānu šķautnes garumu $\frac{1}{3}a$	V=60, k=3	F=32, 12 regulāri piecstūri, 20 regulāri sešstūri	E=90, $l=\frac{1}{3}a$	60+32-90=2