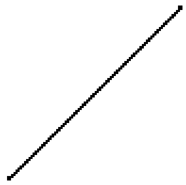
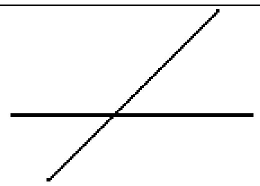
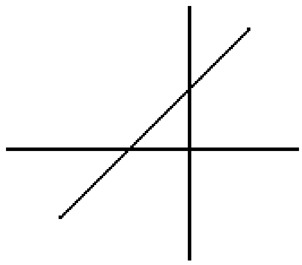
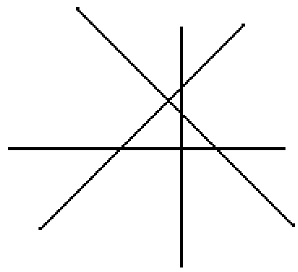
MĀJAS DARBA ATRISINĀJUMI

1. uzdevums.

Kāds ir lielākais apgabalu skaits, kādos plakni var sadalīt *n* taisnes? Atrodi formulu un pierādi to!

Atrisinājums.

			
1 taisne	2 taisnes	3 taisnes	4 taisnes
2 apgabali	2+2 = 4 apgabali	2+2+3 = 7 apgabali	2+2+3+4 = 11 apgabali

Secinām, ka *n* taisnes plakni sadala $2+2+3+4+...+n$ maksimāli daudz apgabalos.

$$2+2+3+4+...+n = 1+(1+2+3+4+...+n) = = 1+\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}[2+n(n+1)] = \frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

Pierādīsim to ar matemātiskās indukcijas metodes palīdzību.

1. Jau pārbaudījām, ka viena taisne plakni sadala 2 apgabalos, t.i., $\frac{1}{2}(1^2+1+2)=2$.
2. Pieņemsim, ka *k* taisnes plakni sadala $\frac{1}{2}(k^2+k+2)$ apgabalos.
3. Pierādīsim, ka $k+1$ taisne plakni sadala $\frac{1}{2}[(k+1)^2+(k+1)+2]$ apgabalos.

Izmantosim to, ka ($k+1$)-mā taisne izveido $k+1$ jaunus apgabalus pie jau esošajiem $\frac{1}{2}(k^2+k+2)$ apgabaliem, kurus veido *k* taisnes. Seko, ka

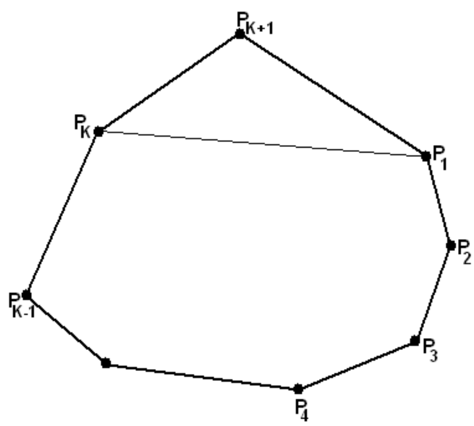
$\frac{1}{2}(k^2+k+2)+(k+1) = \frac{1}{2}(k^2+k+2+2k+2) = \frac{1}{2}\left((k+1)^2+(k+1)+2\right)$. Apgalvojums ir pierādīts.

4. Secinām, ka lielākais apgabalu skaits, kādos n taisnes var sadalīt plakni, ir $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$.

2. uzdevums.

Pierādīt, ka izliekta *n*-stūra leņķu summa ir $180°(n-2)$, ja $n \geq 3$.

<u>Piebilde.</u> *Tev palīdzēs 1. zīmējuma izmantošana.*



1. zīm.

Atrisinājums.

1. Pārbaudīsim indukcijas bāzi, ja $n=3$. Ir zināms, ka trijstūra iekšējo leņķu summa ir $180°\cdot(3-2)=180°$.
2. Pieņemsim, ka izliekta *k*-stūra leņķu summa ir $180°(k-2)$.
3. Pierādīsim, ka izliekta ($k+1$)-stūra leņķu summa ir $180°((k+1)-2)$.

Uzzīmēsim izliektu ($k+1$)-stūri un sadalīsim to divās daļās: trijstūris $P_1P_kP_{k+1}$ un *k*-stūris, kā parādīts 1. zīm. Trijstūra leņķu summa ir $180°$, bet *k*-stūra leņķu summa pēc pieņēmuma ir $180°(k-2)$. Lai iegūtu ($k+1$)-stūra leņķu summu, ir jāsaskaita abu daudzstūru leņķu summas, t. i., $180°+180°(k-2)=180°\cdot(1+k-2)=180°\cdot(k-1)$.

4. Secinājums. Izliekta *n*-stūra leņķu summa ir $180°(n-2)$, ja $n\geq 3$.

3. uzdevums.

Pierādīt, ka izteiksme $2^{2n}-1$ dalās ar 3, ja $n\geq 1$.

Atrisinājums.

1. Pārbaudīsim indukcijas bāzi, ja $n=1$. Izteiksme $2^2-1=4-1=3$ dalās ar 3.
2. Pieņemsim, ka izteiksme $2^{2k}-1$ dalās ar 3.
3. Pierādīsim, ka izteiksme $2^{2(k+1)}-1$ dalās ar 3.

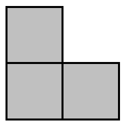
Pārveidosim izteiksmi:

$2^{2(k+1)}-1=2^{2k}\cdot 2^2-1=2^{2k}\cdot 2^2-1+2^{2k}-2^{2k}=2^{2k}-1+2^{2k}\cdot(2^2-1)=(2^{2k}-1)+2^{2k}\cdot 3$ Pirmais saskaitāmais dalās ar 3 pēc pieņēmuma, bet otrais saskaitāmais dalās ar 3, jo viens no tā reizinātājiem ir 3. Tātad izteiksme $2^{2(k+1)}-1$ dalās ar 3.

4. Secinājums. Izteiksme $2^{2n}-1$ dalās ar 3, ja $n\geq 3$.

4. uzdevums.

Pierādīt, ka katru kvadrātu 2×2, 4×4, 8×8, ..., $2^n\times 2^n$ rūtiņas, kuram izgriezta viena stūra rūtiņa, var sagriezt trimino figūriņās, kā parādīts 2. zīmējumā.

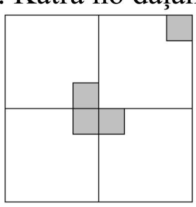


2. zīm.

Atrisinājums.

1. Pārbaudīsim indukcijas bāzi, ja kvadrāts sastāv no 2×2 rūtiņām. Tas ir acīmredzami, ka kvadrāts 2×2 rūtiņas bez stūra rūtiņas ir trimino.
2. Pieņemsim, ka kvadrātu ar $2^k\times 2^k$ rūtiņām, kuram izgriezta stūra rūtiņa, var sagriezt trimino figūriņās.
3. Pierādīsim, ka kvadrātu $2^{k+1}\times 2^{k+1}$ rūtiņas, kuram izgriezta stūra rūtiņa, var sagriezt trimino figūriņās.

Apskatīsim kvadrātu ar $2^{k+1}\times 2^{k+1}$ rūtiņām, kuram izgriezta stūra rūtiņa, un sagriezīsim to 4 vienādās daļās, kā parādīts zīmējumā Nr.3. Katra no daļām ir kvadrāts ar $2^k\times 2^k$ rūtiņām.



3. zīm.

Vienu trimino noliksim tā kā parādīts zīmējumā. Līdz ar to esam ieguvuši četrus vienādus kvadrātus ar $2^k\times 2^k$ rūtiņām, kur katram izgriezta stūra rūtiņa. Pēc pieņēmuma katru no tiem var sagriezt trimino figūriņās. Līdz ar to arī kvadrātu ar $2^{k+1}\times 2^{k+1}$ rūtiņām, kuram izgriezta stūra rūtiņa, var sagriezt „trimino” figūriņās.

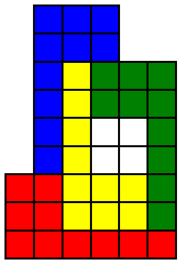
4. Secinājums. Katru kvadrātu no 2×2, 4×4, 8×8, ..., $2^n\times 2^n$ rūtiņām, kuram izgriezta stūra rūtiņa, var sagriezt „trimino” figūriņās.

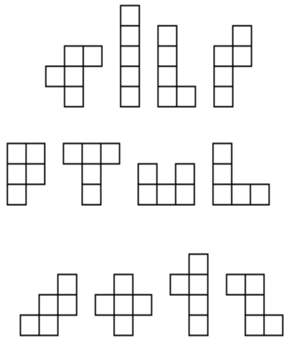
5. uzdevums.

4. zīmējumā redzamais tetrads iekļauj tetramino. Uzzīmēt tetradus, kuri iekļauj pentamino. Tā kā pavisam ir 12 pentamino, skat. 5. zīmējumu, tad jācenšas atrast 12 attiecīgos tetradus.

Piebilde. *Punktu var saņemt arī tikai par vienu tetradu. Jo mazāks būs tetrada rūtiņu skaits, jo augstāk tiks vērtēts jūsu rezultāts. Netiks vērtēti tetradi, kuriem bez aplūkojamā pentamino būs vēl kādi citi caurumi.*

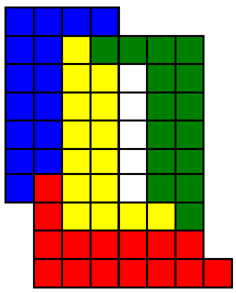
Uzdevums var prasīt izdomu un lielu pacietību. Vēlam katram atrast vismaz vienu tetradu!

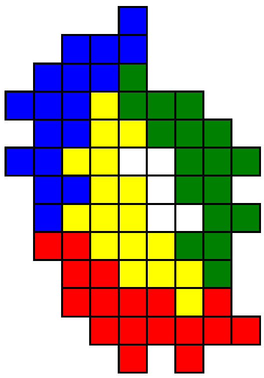

4. zīm.


5. zīm.

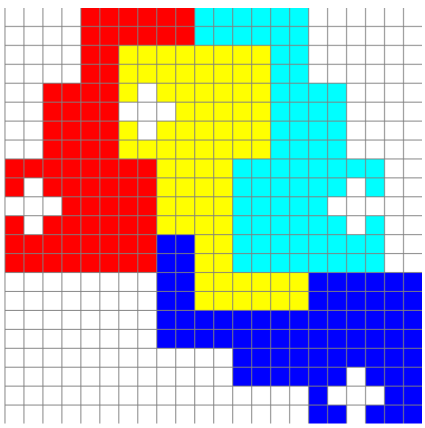
Atrisinājums.

8. klases skolēns Aleksejs Popovs (Rīgas 10. vidusskola) atrada divus tetradus (sk. 6., 7. zīm.), kuri iekļauj attiecīgi I un Z pentamino.

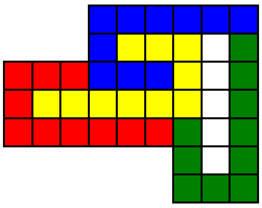

6. zīm.


7. zīm.

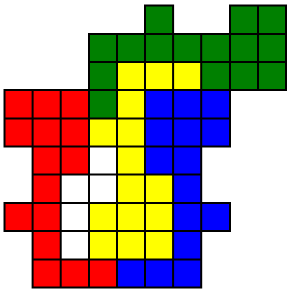
Savukārt 10. klases skolēns Oļegs Matvejevs (Rīgas Ostvalda vidusskola) atrada visus 12 atrisinājumus. Viņš neatkarīgi no uzdevuma autora (asoc. prof. A. Cibuļa) nonāca pie tās pašas idejas, kā var meklēt tādus tetradus, kas iekļauj pentamino vai kādus citus uzdotus polimino. Ideja ir ņemt pietiekami lielu tetradu un tad no tā piemērotā vietā izņemt attiecīgo daudzumu rūtiņu. Lūk, O. Matvejeva tetrads, kas iekļauj pentamino X.


8. zīm.

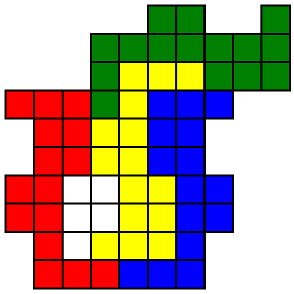
O. Matvejevs atrada arī šādus mazākus tetradus, kas iekļauj attiecīgi pentamino I, N, P, T, U un V, skat. 9., 10., 11., 12., 13. un 14. zīm.



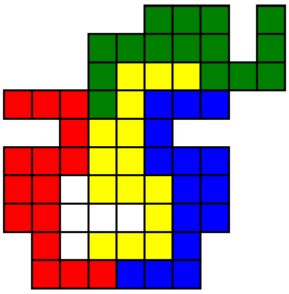
9. zīm.



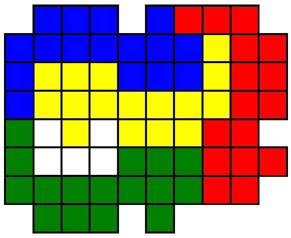
10. zīm.



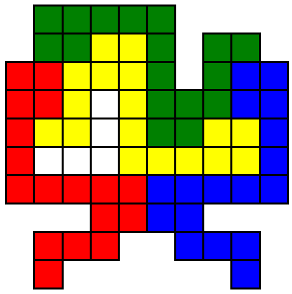
11. zīm.



12. zīm.



13. zīm.



14. zīm.

Piebilde. Problēma atrast vismazākos tetradus, kas iekļauj pentamino, pagaidām nav atrisināta un der kā piemērota tēma skolēnu zinātniski pētnieciskajam darbam.