MĀJAS DARBA ATRISINĀJUMI

1. uzdevums.

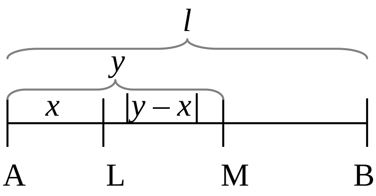
Uz nogriežņa AB brīvi izvēlas punktus L un M. Kāda ir varbūtība, ka punkts L atradīsies tuvāk punktam M nekā punktam A?

Atrisinājums.

Pieņemsim, ka nogriežņa AB garums ir $|AB| = l$;

$x-$ punkta L attālums līdz punktam A;

$y-$ punkta M attālums līdz punktam A;

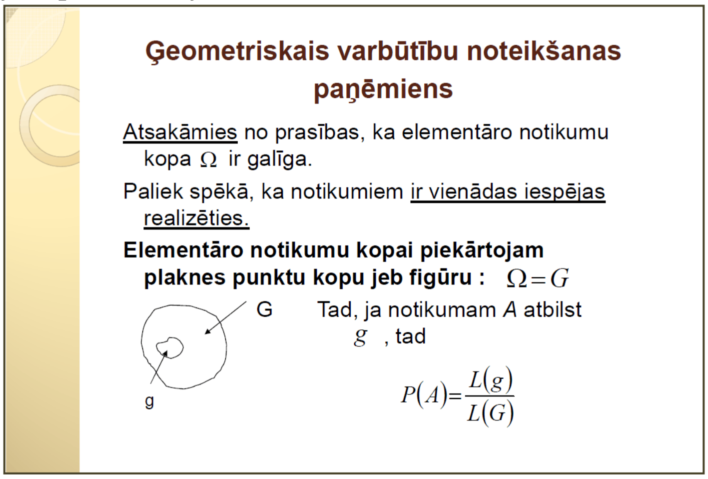


Tad $|y-x|$ ir attālums starp punktiem L un M (moduli rakstām, jo nav zināms, kurš no šiem punktiem atradīsies tuvāk punktam A.

Acīmredzot, ka elementāro notikumu kopa ir Ω, kas sastāv no nogriežņu *x* un *y* pāriem, kuru garums ir intervālā $[0, l]$.

Labvēlīgo notikumu kopa ir *A*, kas sastāv no nogriežņu *x* un *y* pāriem no kopas Ω tādiem, ka $|y-x| < x$.

Piezīme. Tālāk izmantojam prezentācijas materiālu.

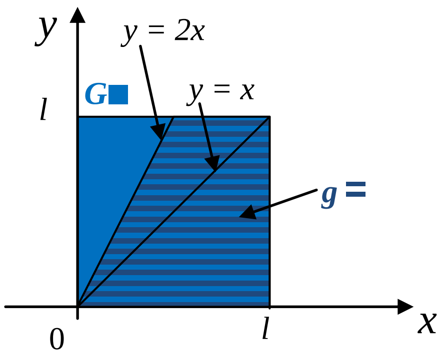


Lai uzzīmētu figūru *g*, atrisinām nevienādību $|y-x| < x$, apskatot divus gadījumus:

1) ja $y \geq x$, tad $\begin{cases} y \geq x \\ |y-x| < x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq x \\ y - x < x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq x \\ y < 2x \end{cases};$

2) ja $y < x$, tad $\begin{cases} y < x \\ |y-x| < x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < x \\ -(y-x) < x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < x \\ y > 0 \end{cases}.$

Attēlojot abas figūras *G* un *g*, iegūstam:



Ar $L(G)$ un $L(g)$ apzīmējam attiecīgi figūru G un g laukumus.

Tad $L(G)=l^2$; $L(g)=\frac{1}{2}l^2+\frac{1}{4}l^2=\frac{3}{4}l^2$;

$$P(A)=\frac{L(g)}{L(G)}=\frac{3l^2}{4l^2}=\frac{3}{4};$$

2. uzdevums.

Uz parketa grīdas uzmet monētu ar diametru d. Parketa dēlīšiem ir kvadrāta forma ar malas garumu a ($a>d$).

Kāda ir varbūtība tam, ka:

a) visa monēta atradīsies uz viena parketa dēlīša;
b) monēta atradīsies uz ne vairāk kā diviem parketa dēlīšiem (diviem parketa dēlīšiem var būt kopīga vai nu visa mala, vai tikai virsotne)?

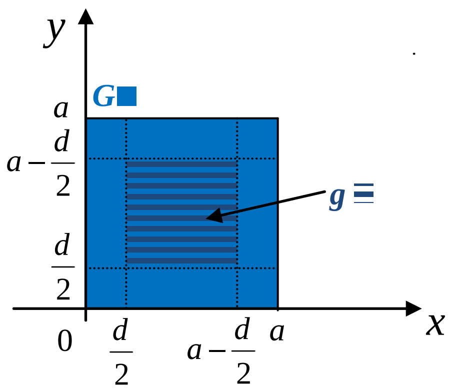
Atrisinājums.

Tā kā visi grīdas dēlīši ir vienādi, varam apskatīt monētas stāvokli pret vienu no tiem.

Ar (x,y) apzīmējam monētas centra koordinātas.

a) Elementāro notikumu kopa Ω sastāv no tādām monētas centra koordinātām (x,y), ka $x\in[0,a]$ un $y\in[0,a]$.

Labvēlīgo notikumu kopa A sastāv no tādām monētas centra koordinātām (x,y) no kopas Ω, ka $x\in\left(\frac{d}{2},a-\frac{d}{2}\right)$ un $y\in\left(\frac{d}{2},a-\frac{d}{2}\right)$.



Ar $L(G)$ un $L(g)$ apzīmējam attiecīgi figūru G un g laukumus.

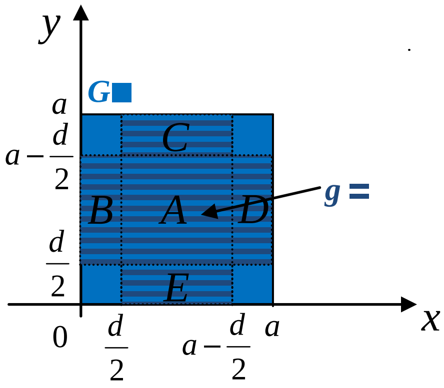
Tad $L(G)=a^2$; $L(g)=\left(a-\frac{d}{2}-\frac{d}{2}\right)^2=(a-d)^2$;

$$P(A)=\frac{L(g)}{L(G)}=\frac{(a-d)^2}{a^2}=\left(\frac{a-d}{a}\right)^2=\left(1-\frac{d}{a}\right)^2;$$

b) Elementāro notikumu kopa Ω sastāv no tādām monētas centra koordinātām (x,y), ka $x,y\in[0,a]$.

Labvēlīgo notikumu kopa A sastāv no tādām monētas centra koordinātām (x,y) no kopas Ω, ka $x\in\left(\frac{d}{2},a-\frac{d}{2}\right)$ un $y\in(0,a)$ vai

$x \in (0, a)$ un $y \in \left(\dfrac{d}{2}, a - \dfrac{d}{2}\right)$.



Ar $L(G)$, $L(g)$, $L(A)$, $L(B)$, $L(C)$, $L(D)$ un $L(E)$ apzīmējam attiecīgi figūru *G*, *g*, *A*, *B*, *C*, *D* un *E* laukumus.

$L(G) = a^2$;

$L(g) = L(A) + L(B) + L(C) + L(D) + L(E) = (a-d)^2 + 4L(B) = (a-d)^2 + 4 \cdot \dfrac{d}{2} \cdot (a-d) = a^2 - d^2$;

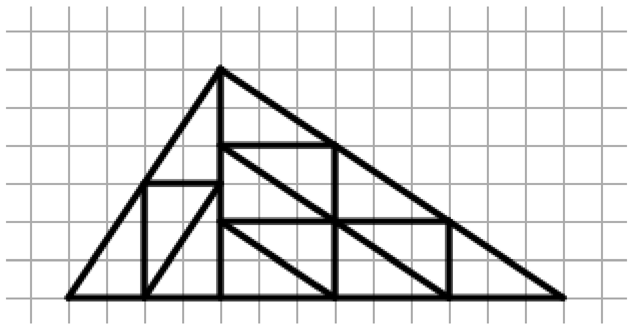
$P(A) = \dfrac{L(g)}{L(G)} = \dfrac{a^2 - d^2}{a^2} = 1 - \dfrac{d^2}{a^2}$.

3. uzdevums.

Uzzīmēt trīsstūri, ko iespējams sagriezt 13 vienādos trīsstūros. Atbildi pamatot.

Atrisinājums.

Tā kā $13 = 2^2 + 3^2$, tad varam konstruēt taisnleņķa trīsstūri, kuru var sagriezt divos taisnleņķa trīsstūros, kurus savukārt var sagriezt 2^2 un 3^2 vienādos trīsstūros:



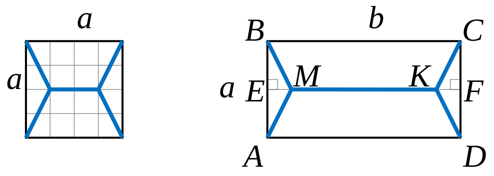
Ir iegūti 13 vienādi taisnleņķa trijstūri, kuru katetes ir 2 un 3 vienības garas.

4. uzdevums.
31. marta nodarbībā mēs uzzinājām, ka kvadrāta virsotnes var savienot ar tāda veida līniju, pa kuru no jebkuras virsotnes var nokļūt uz jebkuru citu, un līnijas kopējais garums ir mazāks par kvadrāta diagonāļu garumu summu. Atrisināt šādus uzdevumus:

a) izdomāt un uzzīmēt vienu konkrētu līniju, kurai ir viegli izrēķināt kopējo garumu, un ar aprēķiniem pamatot, ka tas ir mazāks nekā kvadrāta diagonāļu garumu summa (drīkst izmantot kalkulatoru);

b) pierādīt, ka jebkuram taisnstūrim ir līnija, kas savieno visas tā virsotnes un kuras kopējais garums ir mazāks nekā taisnstūra diagonāļu garumu summa.

Atrisinājums.
a) Apskatām nogriezni, kas savieno kvadrāta, kura malas garums ir a, pretējo malu viduspunktus. Uz šī nogriežņa atrodam punktus, kas atrodas attālumā $a/4$ no tā galapunktiem, savienojam tos ar kvadrāta virsotnēm un savā starpā, iegūstot līniju, kas parādīta zīm. a).



a) b)

Šīs līnijas kopējais garums ir

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{4}\right)^2}\cdot 4+\frac{a}{2}=\sqrt{\left(\frac{2a}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{4}\right)^2}\cdot 4+\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{4a^2+a^2}{16}}\cdot 4+\frac{a}{2}=\sqrt{5a^2}+\frac{a}{2}=$$

$$=a\cdot\left(\sqrt{5}+\frac{1}{2}\right)=a\cdot 2{,}736...$$

Tas ir mazāks nekā kvadrāta abu diagonāļu garumu summa $2d=2\sqrt{2}a=a\cdot 2{,}828...$.

b) Patvaļīga taisnstūra, kura malu garumi ir a un b, $a<b$, gadījumā rīkosimies šādi:

konstruējam nogriezni, kas savieno īsāko malu viduspunktus;

uz šī nogriežņa izvēlamies divus punktus M un K, lai $\angle AMB=120°$ un $\angle CKD=120°$ (skat. zīm. b)).

Tā kā ΔAMB ir vienādsānu, tad $\angle ABM=\angle BAM=30°$. Apzīmē $AM=MB=l$.

Tad $\cos 30°=\frac{BE}{BM}=\frac{a}{2l}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad\Rightarrow\quad l=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}a}{3}$;

$$\mathrm{tg}30°=\frac{EM}{BE}=\frac{EM}{\frac{a}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad\Rightarrow\quad EM=\frac{\sqrt{3}a}{6}$$

Konstruētās līnijas kopējais garums ir

$$L=4\cdot l+MK=4\cdot l+(EF-2EM)=4\cdot\frac{\sqrt{3}a}{3}+\left(b-\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}a}{3}+b=a\sqrt{3}+b.$$

Pierādīsim, ka $L<2d$, kur d ir taisnstūra diagonāles garums. Pietiek pierādīt, ka $L^2<4d^2$, tas ir, $a\sqrt{3}+b<2\cdot\sqrt{a^2+b^2}$.

Lai pierādītu šo nevienādību, veiksim ekvivalentus pārveidojumus:

$$3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2 < 4a^2 + 4b^2$$
$$a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 > 0$$
$$\left(a - \sqrt{3}b\right)^2 > 0$$

Tā kā pēc dotā $b > a$ ($a \neq \sqrt{3}b$) un izteiksmes kvadrāts vienmēr ir nenegatīvs, tad iegūtā nevienādība vienmēr ir patiesa. Tātad patiesa ir arī sākotnējā nevienādība. Līdz ar to esam pierādījuši, ka $L < 2d$.

5. uzdevums.
Nodarbības beigās redzējām, kā uz vienas naglas var novietot 10 tādas pašas naglas tā, lai tās nekristu nost un atrastos līdzsvara stāvoklī. Patstāvīgi izdomāt, kā līdzīgā veidā var novietot 6, 7, 8 utt. naglas. Vai tā var novietot vairāk nekā 20 naglas?

Atrisinājums.
Sešu naglu izvietojums uz vienas naglas ir redzams attēlā. Līdzīgi var uzlikt 7 un 8 naglas, kā arī lielāku skaitu naglu.

Ļoti uzskatāmu uzdevuma atrisinājumu iesūtījis 10. klases skolnieks Oļegs Matvejevs. Tālāk dots viņa risinājums.
6 naglas:

7 naglas:

8 naglas:

9 naglas:

Princips:

Uz vienas naglas jānovieto n naglas. Liekam uz galda vienu naglu, tad ņemam $n - 2$ naglas un liekam tās ar galvām pāri pirmajai naglai, kā parādīts zīmējumos – apmēram pusi uz vienu pusi un citu – uz otru. Tad liekam pēdējo naglu starp divām galvu rindām un paceļam aiz apakšējās naglas. Tagad šo sistēmu viegli uz vidus var uzlikt uz vienas naglas galvas, pats galvenais, lai netrīc rokas. ☺

Ko darīt, ja uz vienas naglas jānovieto vairāk naglu, nekā var novietot uz vienas naglas garuma? Izmantojam divus naglas garumus! Aprakstītajā veidā piepildām pirmo rindu, uzliekam virsū naglu un tad iedomājamies, ka šī naglā ir tā pati pirmā, un atkal liekam uz tās naglas ar galvām iekšpusē.

21 nagla:

25 naglas: