Vārds .... Uzvārds ....

Skola .... Klase ....

PĀRBAUDES DARBS

1. Doti 21 dažādi naturāli skaitļi, kuru vērtība nepārsniedz 100.

a) Vai starp šiem skaitļiem var gadīties 2 tādi skaitļi, kuru starpība dalās ar 11? Pamato savu atbildi!

Jā, var.

Veidosim „būrus" – visus skaitļus no 1 līdz 100 sadalīsim ekvivalences grupās. Vienā grupā ieliksim visus tos skaitļus, kur jebkuru divu skaitļu starpība dalās ar 11. Piemēram, vienā grupā liksim 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99. Līdzīgas grupas veido skaitļi:

1, 12, 23, 34, 45, ... un 2, 13, 24, 35,..... un tamlīdzīgi.

Šādu „būru" kopējais skaits ir 11, to mazākie skaitļi atbilstoši ir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 un 11. Katru nākamo skaitli būs jāliek vienā no minētajiem „būriem".

Izvēlētie 21 skaitļi būs „zaķi", kurus mēs izvietosim būros. Ir 21 „zaķis" un 11 „būri", tāpēc saskaņā ar Dirihlē principu vismaz vienā būrī būs vismaz 2 zaķi. Šo divu zaķu starpība...., atvainojiet!, ...skaitļu starpība dalās ar 11.

Formāls matemātisks pamatojums ir īss:

Doto 21 skaitli sadalām atlikumu ekvivalences klasēs pēc moduļa 11. Ievērosim, ka, dalot kādu veselu skaitli ar 11, ir iespējami 11 dažādi atlikumi. Tāpēc atlikumu ekvivalences klases kopumā ir 11. Ja 21 skaitli sadala pa 11 klasēm, tad pēc Dirihlē principa vismaz vienā klasē būs vismaz divi skaitļi. Ja ņem divus skaitļus no vienas šādas klases, tad to starpība dalās ar 11.

b) Vai starp šiem skaitļiem varētu gadīties 3 tādi skaitļi, ka jebkuru divu skaitļu starpība no šiem trim dalās ar 5? Pamato savu atbildi!

c) Vai starp dotajiem 21 skaitļiem varētu būt vairāk nekā 3 skaitļi ar b) punktā minēto īpašību? Pamato savu atbildi!

b) un c) *Jā, var.*

Aplūkosim skaitļu ekvivalences klases pēc moduļa 5. To skaits ir 5. Tad doto 21 skaitli sadalot 5 ekvivalences klasēs, vismaz vienā klasē būs vismaz 5 no dotajiem skaitļiem. Izvēloties jebkurus divus no šiem pieciem skaitļiem, to starpība dalīsies ar 5.

d) Vai starp šiem dotajiem skaitļiem ir tāda skaitļu grupa, kurā ir vismaz 1 skaitlis, ka visu šīs grupas skaitļu summa dalās ar 5? Pamato savu atbildi!

Jā, ir.

Ja starp izvēlētajiem 21 skaitļiem ir kāds, kas dalās ar 5, tad uzdevums ir atrisināts. Pieņemsim, ka starp izvēlētajiem skaitļiem neviens nedalās ar 5. Arī šos skaitļus sadalām ekvivalences klasēs pēc moduļa 5. Tad vienā klasē nonāks visi tie skaitļi, kuru atlikums, dalot ar 5, ir 1, otrā klasē tie, kuru atlikums ir 2, trešā klasē tie, kuru atlikums ir 3, ceturtajā – 4. Pietiekami ir ņemt 5 skaitļus no vienas un tās pašas klases, to summa dalās ar 5. Sadalot 21 skaitli 4 klasēs, atradīsies vismaz viena klase ar vislielāko skaitļu skaitu tajā. Šajā klasē būs vismaz 6 skaitļi. Var summēt jebkurus piecus no tiem – to summa dalīsies ar 5.

Piezīme. Jūs jau pamanījāt, ka 21 skaitlis – tas ir daudz. Minētie piemēri izpildītos arī mazākam skaitam skaitļu. Vai varat pateikt, kāds ir mazākais izvēlēto skaitļu skaits, lai izpildītos uzdevumā minētās īpašības? Vai visos piemēros šis mazākais izvēlēto skaitļu skaits būs vienāds?

2. Rūtiņu kvadrāta ar izmēru 15×15 rūtiņas katra rūtiņa ir nokrāsota vienā no 3 krāsām – sarkana, zila, dzeltena. Pierādiet, ka var atrast vismaz 2 tādas rindas, kurās vienā krāsā nokrāsoto rūtiņu skaits ir vienādā skaitā!

Pieņemsim, ka uzdevuma apgalvojums nav spēkā. Tad vienā krāsā nokrāsoto rūtiņu skaits katrā rindā ir citādāks. Aplūkosim to krāsu, kurā ir vismazāk nokrāsoto rūtiņu. Pieņemsim, ka tā ir sarkanā krāsa. Kopējais rūtiņu skaits ir 225, tad sarkanā krāsā ir nokrāsota ne vairāk kā trešā daļa rūtiņu, tas ir, ne vairāk kā 75.

„Būrus” šeit nosauksim šādi: sarkanā krāsā nokrāsoto rūtiņu skaits vienā rindā. Tad kopumā te var būt 16 dažāda veida būri ar numuriem 0, 1, 2, ..., 15. Tas ir, var nebūt neviena sarkana rūtiņa vienā rindā; var būt tieši viena sarkana rūtiņa rindā; tieši divas;...; visas rindas rūtiņas ir sarkanas.

„Zaķi” – kvadrāta rindas. Rindu liksim tajā „būrī”, kura numurs sakrīt ar sarkani krāsoto rūtiņu skaitu rindā.

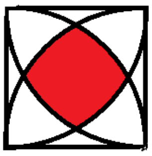
Ja katrā rindā ir citāds sarkano rūtiņu skaits, tad vismazākais iespējamais sarkano rūtiņu skaits visā kvadrātā ir: $0+1+2+\cdots+14=\frac{1+14}{2}\cdot 14=105$

(Ievērosim – ja vienā rindā nav neviena sarkana rūtiņa, tad visi citi mazākie sarkano rūtiņu skaiti būs atlikušajās 14 rindās.)

Ja aplūko nokrāsoto kvadrātu, tad reālais sarkano rūtiņu skaits ir mazāks par 105, tas ir, nepārsniedz 75 (jo mēs pieņēmām, ka sarkanā krāsā nokrāsoto rūtiņu skaits ir vismazākais). No tā varam secināt, ka daži „būri” paliks tukši. Tukši būs vismaz 2 „būri”, jo starpība starp vēlamo un reālo sarkani nokrāsoto rūtiņu skaitu ir vismaz 30, bet lielākais „būra” numurs ir 15.

Kopumā ir 15 „zaķi” – rindas, kuras jāizvieto ne vairāk kā 14 „būros”, tad saskaņā ar Dirihlē principu vismaz divās rindās būs vienāds sarkano rūtiņu skaits. Pieņēmums izrādījās aplams. Tātad var atrast vismaz 2 tādas rindas, kurās vienā krāsā nokrāsoto rūtiņu skaits ir vienādā skaitā.

3. Pieņemsim, ka kvadrāta malas garums ir 1. Izdariet minējumu, kas lielāks:
A desmit iekrāsotie laukumi (skat. 1. zīm.)
B π


1. zīm.

4. Izdariet minējumu, kurš no integrāļiem lielāks!

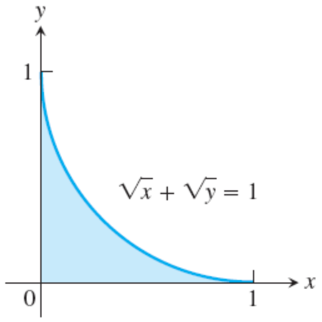
A $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2012} x\,dx}{\sin^{2012} x + \cos^{2012} x}$ **B** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2013} x\,dx}{\sin^{2013} x + \cos^{2013} x}$

Abu integrāļu vērtības ir vienādas.

5. *Krāsotāja paradokss.* Piltuves tilpums galīgs, bet piltuvē ieliktas plāksnītes laukums bezgalīgs. Tas nozīmē, ka ar galīgu piltuvē ielietas krāsas daudzumu var nokrāsot bezgalīgu laukumu. Kā tas var būt? Piedāvāt izskaidrojumu, kur, jūsuprāt, ir kļūda.

Krāsas slāņa iezums neļauj tai piepildīt visu piltuvi.

6. **a)** Izdariet minējumu, aptuveni cik procentu no vienības kvadrāta veido iekrāsotais laukums (skat. 2. zīm.)!



2. zīm.

A 17 **B** 18 **C** 24 **D** 25 **E** 30

b) Veiciet aprēķinu sava minējuma pārbaudei!

Uzdevumu var atrisināt vairākos veidos.
***1)** Izsakām y:*

$$y = \left(1-\sqrt{x}\right)^2 = 1 - 2\sqrt{x} + x$$

Atrodam funkciju F, kuras atvasinājums ir y:

$$F(x) = x - \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{1}{2}x^2$$

Pēc lekcijā dotās formulas figūras laukums vienāds ar

$$F(1) - F(0) = 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \approx 17\%$$

***2)** Arhimēds uzdevumu spētu atrisināt, iztiekot ar paša iegūto parabolas segmenta laukuma L_S formulu: $L_S = \frac{2}{3}bh$, kur b un h – attiecīgi segmenta pamats un augstums. Ievērosim, ka punkts $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$ atrodas uz parabolas (tas, ka dotā līkne ir parabola, būtu jāpārbauda) un ir segmenta augstuma galapunkts. Vienkārši aprēķināt, ka $b = \sqrt{2}$, $h = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ Tātad $L_S = \frac{1}{3}$. Atņemot no trijstūra laukuma segmenta laukumu, iegūstam iekrāsotās daļas laukumu: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \approx 17\%$.*