Īsi atrisinājumi.

5.1. a) jā, var; piemēram,

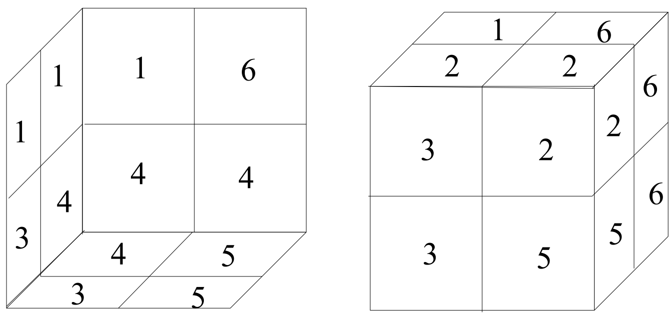
11, 1, 12, 2, 13, 3, 14, 4, 15, 5, 16, 6, 17, 7, 18, 8, 19, 9, 20, 10

b) nē, nevar. Skaitlim 10 iespējams tikai viens kaimiņš – skaitlis 20.

5.2. a) jā, var; piemēram, **3; 6; 9; 12** un **1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11**

b) nē, nevar. Ja tas būtu iespējams, tad visu skaitļu summai būtu jādalās ar 3, bet tā ir 91.

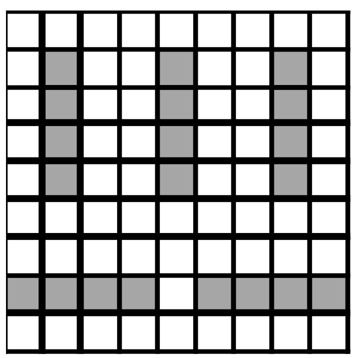
5.3. Jā, var. Skat. 3. zīm.



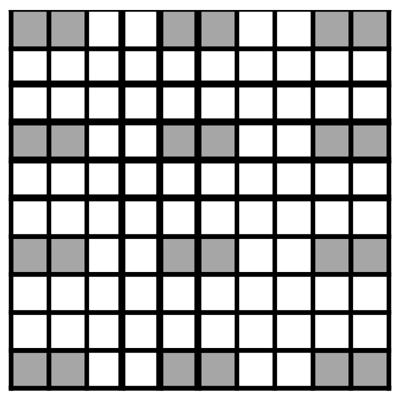
Neredzamās skaldnes Redzamās skaldnes

3. zīm.

5.4. a) var gadīties; skat. 4. zīm.



4. zīm.



5. zīm.

b) nevar gadīties, skat. 5. zīm. Katrs iekrāsotais taisnstūris „aizliedz" parādīties augstākais diviem no tur attēlotajiem „domino", bet tādu ir 12.

5.5. <u>Atbilde:</u> Ar 5 gājieniem.

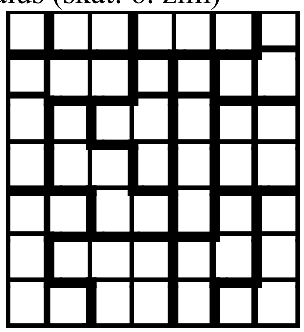
- Var izdarīt, piemēram, šādus pārveidojumus:

abab**ab**ababa
aba**bbaa**baba
ab**aaabbb**aba
a**bbbbaaaa**ba
aaaaa**bbbbba**
aaaaaabbbbb

- Sākumā ir 10 vietas, kur blakus stāv dažādi burti, beigās – tikai viena tāda vieta. Ar katru gājienu tādu vietu skaits samazinās ne vairāk kā par 2, tāpēc vajag vismaz 5 gājienus.

6.1. No dotā seko: četrkāršots Andra naudas daudzums ir visu zēnu kopējais naudas daudzums, un pieckāršots Jāņa naudas daudzums ir visu zēnu kopējais naudas daudzums. Tāpēc Andrim naudas ir vairāk.

6.2. **a)** Var iegūt 13 gabalus (skat. 6. zīm)



6. zīm.

1	1	1
1	2	2
2	3	4

7. zīm.

b) 6. zīm. izmantotas visas dažādās figūriņas ar 1; 2; 3; 4 rūtiņām un 4 figūras ar 5 rūtiņām. Ja figūras aizstātu ar citām, kas sastāv no vairāk rūtiņām, daļu skaits nevarētu palielināties.

6.3. Ja $\overline{ab}$ ir labs naturāls skaitlis, tad $10a + b = ab + a + b$ un $9a = ab$, $b = 9$. Tātad meklējamie skaitļi ir 19; 29; 39; ...; 99.

6.4. <u>Atbilde:</u> 17;

a) tabula ar skaitļu summu 17 redzama 7. zīm.

b) mazākā iespējamā summa vienā rindā vai kolonā ir 3. Tāpēc visu šo sešu summu summa S nav mazāka par $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33$. Tā kā S pāra skaitlis (katrs tabulas skaitlis tajā ieskaitīts divas reizes), tad $S \geq 34$, no kurienes seko, ka tabulā ierakstīto skaitļu summa nav mazāka par 17.

6.5. Eksistē divi cilvēki x un y, kuri pazīst viens otru. Ja u – patvaļīgs cilvēks, tad eksistē tāds z, kas pazīst x, y un u; tātad x, y, z visi pazīst viens otru. Eksistē tāds t, kas pazīst x, y un z; tātad x, y, z, t visi pazīst cits citu. Atlikušajiem 3 cilvēkiem eksistē kāds, kas pazīst tos visus (šis „kāds" ir viens no x, y, z, t); tas der par meklējamo cilvēku.

7.1. <u>Atbilde:</u> 7 skaitļus.

a) izsvītrojot visus pāra skaitļus, katru divu atlikušo skaitļu summa ir pāra skaitlis, kas nav mazāks par 4, tātad tā ir salikts skaitlis,

b) katrā no skaitļu pāriem (1,2), (3, 14), (4, 13), (5, 6), (7, 10), (8, 15), (11, 12) vismaz viens skaitlis ir jāsvītro.

7.2. **a)** nē; $(ax + b) + (cx + d) = (a + c)x + (b + d)$

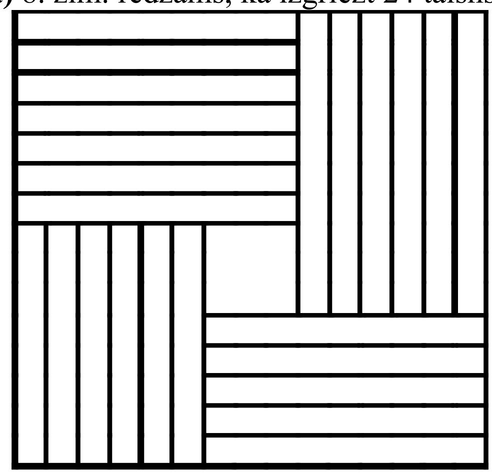
b) jā; piemēram, $f(x) = 1$ un $g(x) = 1$.

7.3. Uzdevumā minētie nogriežņi veido divus trijstūrus ΔBAD un ΔBCD ar kopīgu malu BD. Ne 2 cm, ne 3 cm garais nogrieznis nevar būt mala trijstūrī kopā ar 10 cm garo nogriezni, jo tad trešajai malai jābūt garākai par 10 cm – 3 cm = 7 cm; tātad BD nav ne 2 cm, ne 3 cm garš. Nevar būt BD = 10 cm, jo no atlikušajiem garumiem nevar izveidot divus pārus (x, y) un (z, t) tā, ka $x + y > 10$ un $z + t > 10$; līdzīga iemesla dēļ nevar būt BD = 7 cm. Tāpēc jābūt BD = 4 cm. Šī iespēja der, jo var ņemt, piemēram, AB = 2 cm, AD = 3 cm, CB = 7 cm, CD = 10 cm.

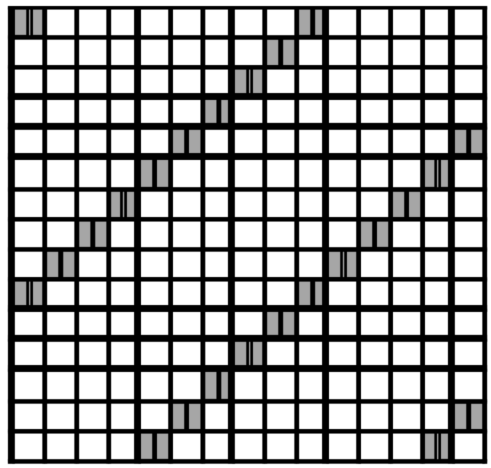
7.4. Nē, nevar. Ir tikai 7 skaitļi, kas mazāki par 8. Tāpēc kādā no 8 rindiņām noteikti visi skaitļi ir vismaz 8. Ja a, b, c – šīs rindiņas skaitļi, tad vai nu $b > 8$, vai $c > 8$; tāpēc $b \cdot c > 8 \cdot 8 = 64 \geq a$, tātad $b \cdot c > a$.

7.5. Atbilde**:** 24.

a) 8. zīm. redzams, kā izgriezt 24 taisnstūrus.



8. zīm.



9. zīm.

b) viegli redzams, ka katram taisnstūrim jāsatur tieši viena iekrāsota rūtiņa (9. zīm.). Tā kā šādu rūtiņu ir 24, tad vairāk par 24 taisnstūriem izgriezt nevar.

8.1. Atbilde: 3 skaitļus.

a) izsvītrojot skaitļus 10; 11; 13, iegūstam sadalījumu

$$1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15$$

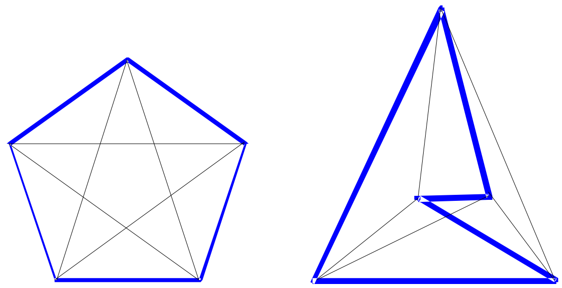
b) abos reizinājumos jāietilpst vieniem un tiem pašiem pirmskaitļiem. Tāpēc 11 un 13 jāsvītro noteikti (tie katrs sastopami vienā eksemplārā), un jāsvītro arī 5, 10 vai 15, lai atlikušo reizinātāju „5” būtu pāra skaits.

8.2. Ievērosim, ka:

- ja 2^n sākas ar 1, tad 2^{n+1} nesākas ar 1,
- 2^n ciparu skaits nevar par vairāk nekā 1 pārsniegt 2^{n-1} ciparu skaitu,
- ja 2^n sākas ar 1, tad 2^n ir par 1 ciparu vairāk nekā 2^{n-1}.

No šejienes izriet: sadalot skaitļus 2^n, n = 1; 2; ...; 200, grupās pēc to ciparu skaita, pavisam ir 61 grupa un katrā grupā (izņemot viencipara pakāpes) ir tieši viena pakāpe, kas sākas ar ciparu 1. Tāpēc uzdevuma atbilde ir 60.

8.3. Piecstūrim ir 5 diagonāles, no tām pavisam var izveidot 10 pārus. Piecos pāros diagonāles saskaras ar galiem, tātad nekrustojas. Tāpēc krustpunktu nevar būt ne vairāk par 5, ne mazāk par 0. Piemērus skat. 10. zīm.; piecstūru malas iezīmētas zilā krāsā.



10. zīm.

8.4. Apzīmēsim skaitļus a, b, c, d, e ciemu apmeklēšanas secībā ar x, y, z, t, v. Tad izmaksas ir

$$x\,(x + y + z + t + v) + (x + y)(y + z + t + v) +$$
$$+ (y + z)(z + t + v) + (z + t)(t + v) + (t + v)\,v,$$

kas pēc pārveidojumiem (pakāpeniski apvienojot saskaitāmos summā „no otra gala”) izrādās $(x + y + z + t + v)^2$. Tātad izmaksas visos gadījumos ir vienas un tās pašas.

8.5. Ja $a > b$, uzvar Jānis. Apzīmēsim $a = b + c$, $c > 0$. Jānis sadala savu nogriezni gabalos $b+\frac{2c}{3}$, $\frac{c}{6}$, $\frac{c}{6}$. Tad daļa ar garumu $b+\frac{2c}{3}$ ir garāka par visām 5 citām daļām kopā, tāpēc tā nevar būt trijstūra mala.

Ja $a \le b$, uzvar Pēteris. Pieņemsim, ka Jāņa daļas ir $x \ge y \ge z$, $x + y + z = a$. Pēteris izveido daļas ar garumiem x, $\frac{b-x}{2}$, $\frac{b-x}{2}$. Tad var salikt vienādsānu trijstūri (x, x, y) un vienādsānu trijstūri ($\frac{b-x}{2}$, $\frac{b-x}{2}$, z) : ievērojam, ka $x \ge y$ un $\frac{b-x}{2} \ge z \Leftrightarrow b-x \ge 2z$. Pēdējā nevienādība ir pareiza, jo $b-x \ge a-x = y+z \ge 2z$.

Īsi norādījumi vērtēšanai.

5.1., 5.2., 5.4., 5.5. : katra daļa – 5 punkti.

6.2. Par piemēru - 6 punkti, par maksimalitātes pierādījumu – 4 punkti.

6.3. Par piemēriem bez pamatojuma, ka tie ir vienīgie – līdz 5 punktiem (ja nav visu skaitļu, ne vairāk par 3 punktiem).

6.4. Par piemēru – 4 punkti, par minimalitātes pierādījumu – 6 punkti.

7.1. Par piemēru – 4 punkti.

7.2. Par katru daļu - 5 punkti.

7.3. Par atbildi – 2 punkti.

7.5. Par piemēru - 5 punkti.

8.1. Par piemēru – 5 punkti.

8.2. Par atbildi bez pamatojuma – 3 punkti.

8.3. Par pierādījumu, ka $n \leq 5$ – 3 punkti. Par piemēru ar $n = 0$ – 5 punkti.

8.5. Par katru gadījumu – 5 punkti.

Labu veiksmi Jums un Jūsu skolēniem!

A.Liepas NMS