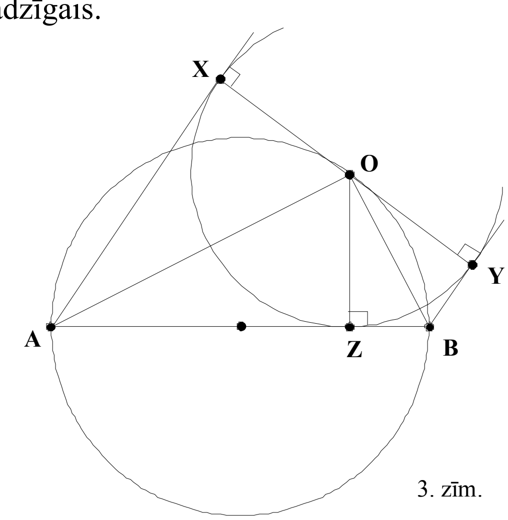
Īsi atrisinājumi.

9.1. Nevienādību pārveido par $(a-3)^2+(a-3)(b-3)+(b-3)^2 \geq 0$. Tālāk ievēro, ka $x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \geq 0$.

9.2. Ja x – pāra skaitlis, pirmskaitļu ir ≤1. Ja x=1; 3; 5, pirmskaitļu ir ≤4 (to ir 4 pie x=3 un x=5). Ja x>5, tad, šķirojot iespējas atkarībā no x pēdējā cipara, redzam, ka vienam skaitlim pēdējais cipars ir 5. Tātad tas nav pirmskaitlis, un pirmskaitļu nav vairāk par 4.

9.3. Tā kā $\Delta AOX=\Delta AOZ$ (hk), tad $\angle XAZ=2\angle OAZ$. Līdzīgi $\angle YBZ=2\angle OBZ$. Tāpēc $\angle XAZ+\angle YBZ=2(\angle OAZ+\angle OBZ)=2(180°-\angle AOB)=2(180°-90°)=180°$, no kurienes seko vajadzīgais.

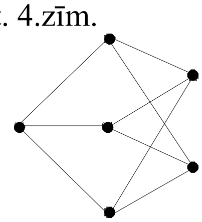


3. zīm.

9.4. Atbilde: jā, var.

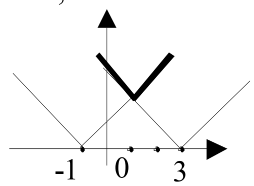
Risinājums. Ja pieci no sākotnējiem skaitļiem ir x; y; z; t; 1, aizstājam x un y ar a=z+t-1. Tālāk z un t aizstājam ar 1+a-a=1. Tālāk a un a aizstājam ar 1+1-1=1. Tagad ir vismaz 5 vieninieki. Līdzīgi pakāpeniski pārvēršam par vieniniekiem visus skaitļus, kas tādi vēl nav.

9.5. To, ka var būt 6 cilvēki, skat. 4.zīm.


4. zīm.

Pierādīsim, ka tas ir mazākais iespējamais skaits. Apzīmēsim ar A vienu cilvēku, ar B, C, D – viņa draugus. Tā kā B nevar draudzēties ne ar C, ne D, tad ir vismaz vēl divi citi cilvēki – B draugi, no kurienes seko vajadzīgais.

10.1. Ievērosim, ka a + b + |a - b| = 2max(a, b). Tāpēc apskatāmā izteiksme ir $2\max(|x+1|,|x-3|)$. Tā kā $\max(|x+1|,|x-3|)=|x-1|+2$ (skat. 5.zīm), tad meklējamais minimums ir 4, un to sasniedz pie x = 1.



5. zīm.

10.2. Apzīmēsim divus viens otram sekojošus palindromus, kuru starpība ir pirmskaitlis, ar a un b, a<b. Pieņemsim, ka a sākas (tātad arī beidzas) ar ciparu x, bet b – ar ciparu y. Patvaļīga naturāla skaitļa z ciparu skaitu apzīmēsim ar |z|.

Starpība b-a var būt 11 (piemēram, 22 – 11 = 11) un 2 (piemēram, 101 – 99 = 2). Pierādīsim, ka citu iespēju nav. Ja a < 100, to pārbauda tieši. Pieņemam, ka a > 100. Ja būtu x = y, tad b - a dalītos ar 10 un nebūtu pirmskaitlis. Tāpēc x ≠ y. Šķirojam divas iespējas.

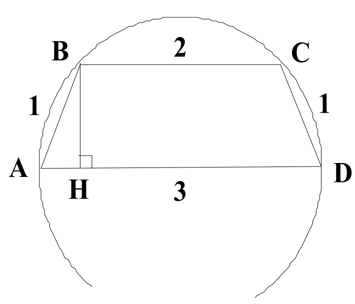
A. x < y. Tad x + 1 = y (pretējā gadījumā starp a un b atrastos palindroms $\overline{\underbrace{zzz\ldots z}_{|a|\text{ reizes}}}$, kur z=x+1). Tad jābūt $a=\overline{x99\ldots 9x}$ (pretējā gadījumā starp a un b atrastos palindroms $\overline{x99\ldots 9x}$); tad $b=\overline{y00\ldots 0y}$ un $b-a=11$.

B. x > y. Tad |b| ≥ |a| + 1. Jābūt $a=\underbrace{999\ldots 9}_{t\text{ reizes}}$, un tad noteikti $b=1\underbrace{00\ldots 0}_{t-1\text{ reizi}}1$ (ja būtu citādi, tad starp a un b atrastos palindroms $\underbrace{999\ldots 9}_{|a|}$). Tad $b-a=2$.

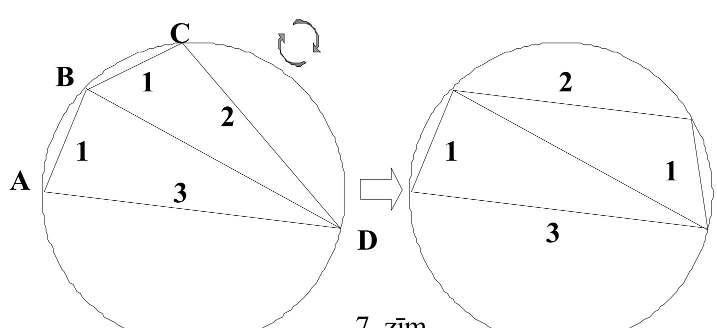
10.3. Šķirojam divus gadījumus:

A. Malas ar garumu 1 ir pretējās malas. Tad BC||AD, $AH=\frac{1}{2}(AD-BC)=\frac{1}{2}$,

$BH=\frac{\sqrt{3}}{2}$ un $L(ABCD)=\frac{5\sqrt{3}}{4}$ (6. zīm.)



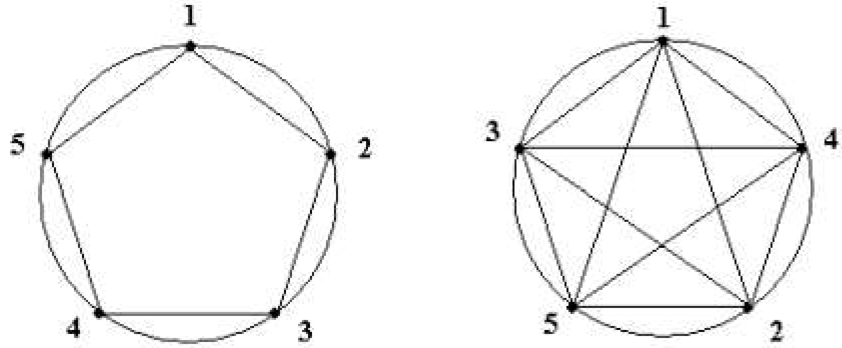
6. zīm.



7. zīm.

B. Malas ar garumu 1 ir blakus malas (7. zīm). Sagriežam riņķi pa hordu BD un vienu no daļām "apgriežam otrādi", pēc tam abas daļas atkal saliekot kopā pa hordu. Simetrijas dēļ atkal iznāks riņķis, un šis gadījums reducēts uz iepriekšējo.

10.4. a) nē. Skat., piem., 8. zīm.



8.zīm.

b) jā. Apvelkam ap abiem 6-stūriem riņķa līnijas. Ja eksistē kaut viens skaitļu pāris, kas abos 6-stūros ir diametra galapunktos, tad par trešajām virsotnēm var ņemt jebkuras ar vienādiem numuriem – abi trijstūri būs taisnleņķa.

Ja tāda pāra nav, tad ņemam divus skaitļus, kas pirmajā 6-stūrī ir pretējās virsotnēs (pieņemsim, tie ir x un y). Pieņemsim, ka skaitlis z otrā 6-stūrī ir pretējā virsotnē skaitlim x. Tad skaitļi x, y, z ir meklējamie: abi ar tiem sanumurētie trijstūri ir taisnleņķa.

10.5. Kvadrātvienādojuma grafika simetrijas dēļ $f(x_1)=f(x_2)$ (kur $x_1 \neq x_2$) tad un tikai tad, ja $\frac{x_1+x_2}{2}=x_0$, kur x_0 – parabolas virsotnes abscisa. No dotā seko, ka $a+b+c+d+e=2x_0$. No tā savukārt seko visas vajadzīgās vienādības.

11.1. Ja $a<b<c<d<e$, tad $a+b<a+c<a+d<a+e<b+e<c+e<d+e$. Tātad ir vismaz 7 dažādas summas. Tā kā pavisam ir 10 izvēlēto skaitļu pāri, tad nav vairāk par 10 dažādām summām. Piemēri

1; 2; 3; 4; 5
1; 2; 3; 4; 6
1; 2; 3; 4; 7
1; 2; 3; 5; 8

parāda, ka pastāv visas iespējas 7; 8; 9; 10.

11.2. Pie $n=2$; $n=3$; $n=4$ redzams, ka 2^n-2 nedalās ar 10. Ievērojam, ka

$$x^5-x=x\left(x^4-1\right)=x\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=x\left(x^2-1\right)\left(x^2-4+5\right)=$$
$$=x\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)+5x\left(x^2-1\right)=$$
$$=(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)+5(x-1)x(x+1).$$

Tā kā

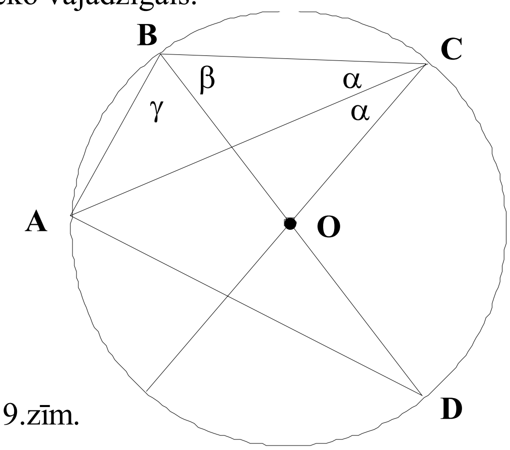
1) vai nu x, vai $x-1$ ir pāra skaitlis,
2) viens no pieciem pēc kārtas ņemtiem veseliem skaitļiem $x-2$; $x-1$; x; $x+1$; $x+2$ dalās ar 5,

tad katrs saskaitāmais dalās gan ar 2, gan ar 5. Tā kā LKD(2;5) = 1, no tā seko, ka abi saskaitāmie dalās ar $2 \cdot 5=10$. Tātad mazākā n vērtība ir 5.

11.3. Skat. 9. zīm. No ievilktu leņķu īpašības $\angle BDA=\angle BCA=\alpha$. Tāpēc $\alpha+\gamma=\frac{1}{2}\cup BAD=90^{\circ}$. No vienādsānu trijstūra BOC: $\beta=2\alpha$. No ΔABC:

$\alpha+\beta+\gamma<180^o$. Tāpēc $\beta<180^o-(\alpha+\gamma) = 90^o$, tātad $\alpha = \frac{1}{2}\beta<45^o$. Tāpēc $\gamma = 90^o-\alpha>45^o$.

No $\beta<90^o$ un $\gamma>45^o$ seko vajadzīgais.



9.zīm.

11.4. Atbilde**:** intervālu $\left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Atrisinājums:

a) ja $|p|\le 1$ un $|q|\le 1$, tad vienādojuma $x^2 + px + q = 0$ reālai saknei x_o ir spēkā $|x_o| = \left|\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}\right| \le \left|\frac{p}{2}\right| + \frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q} \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Tātad visas saknes pieder minētajam intervālam.

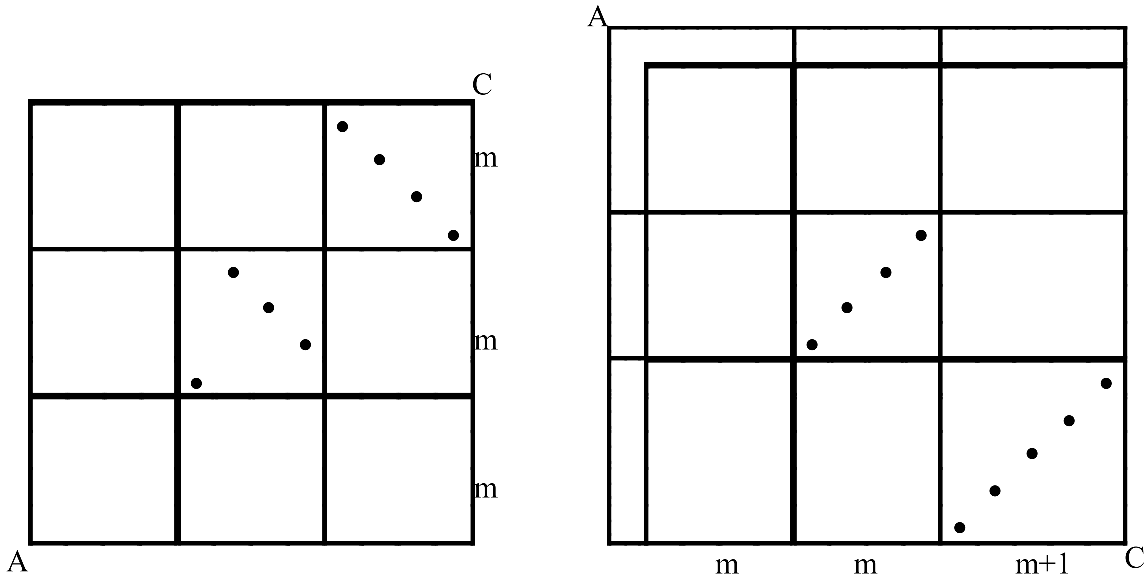
b) vienādojumu $x^2 \pm x - 1 = 0$ saknes ir $\frac{-1\mp\sqrt{5}}{2}$ un $\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}$. Tātad intervāla galapunkti **ir** vajadzīgā tipa vienādojumu saknes. Pieņemsim, ka $z\in\left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, tad $z = \alpha\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, kur $|\alpha|\le 1$. Apskatām vienādojumu $x^2 - \alpha x - \alpha^2 = 0$. Ievērojam, ka $|-\alpha|\le 1$ un $|-\alpha^2|\le 1$, un šī vienādojuma saknes ir $\frac{\alpha}{2}\mp\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\alpha^2} = \frac{\alpha}{2}\mp|\alpha|\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}$. Tātad viena no tām ir $\alpha\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2} = z$. Tātad **visi** apskatāmā intervāla punkti ir vajadzīgā tipa vienādojumu saknes.

11.5. Atbilde**:** vajag vismaz $k = \left\lceil\frac{2n-1}{3}\right\rceil$ lēdijas, un ar šo daudzumu pietiek.

(Tātad 2m, ja n=3m;
2m+1, ja n=3m+1;
2m+1, ja n=3m+2.)

Atrisinājums: Pieņemsim, ka ir k lēdijas, kas apmierina uzdevuma nosacījumus. Tad ir vismaz n-k rindas (kolonnas) bez lēdijām.

Pieņemsim, ka augšējā "bezlēdiju" rindā r_1, r_2, ..., r_{n-k} ir rūtiņas, kuru kolonnās nav lēdiju, un labējā "bezlēdiju" kolonnā R_1, R_2, ..., R_{n-k} ir rūtiņas, kuru rindās nav lēdiju (ievērojam: **viena** r_i sakrīt ar **vienu** R_j). Tad ir vismaz 2(n-k)-1 šādas rūtiņas uz dažādām diagonālēm, kas paralēlas AC. Tāpēc jābūt $k \geq 2(n-k)$, $3k \geq 2n-1$, $k \geq \frac{2n-1}{3}$.



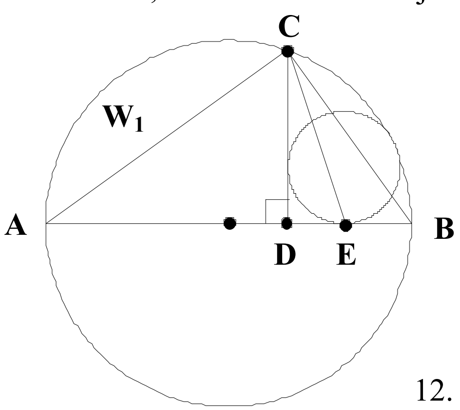
n=3m 10.zīm. n=3m+1, n=3m+2

12.1. Katra nākošā virknes locekļa atlikumu, dalot ar 6, iegūst, saskaitot abu iepriekšējo virknes locekļu atlikumus dalīšanā ar 6 un dalot iegūto summu ar 6 ar atlikumu. Tāpēc virknes pirmo 26 locekļu atlikumi, dalot ar 6, ir:

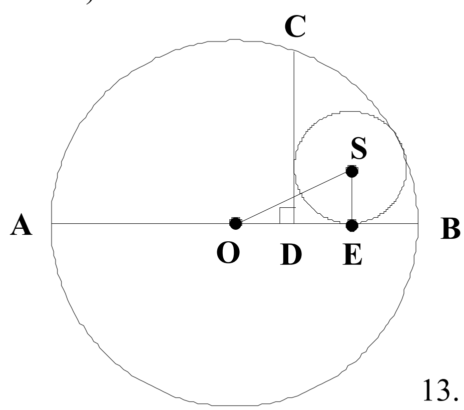
1; **1**; 2; 3; 5; 2; 1; 3; 4; 1; 5; 0; 5; 5; 4; 3; 1; 4; 5; 3; 2; 5; 1; 0; **1**; **1**;…

Redzam, ka virknes 24. loceklis dalās ar 6. Tāpat skaidrs, ka atlikumi atkārtojas ar periodu 24, jo 1. atlikums sakrīt ar 25-o, bet 2. atlikums sakrīt ar 26-o. Tā kā $2004 = 24 \cdot 83 + 12$, tad 2004-ais loceklis dod tādu pašu atlikumu kā 12-ais, tātad arī dalās ar 6.

12.2. **a)** No trijstūra ΔCEB pēc ārējā leņķa īpašības $\angle CBE + \angle BCE = \angle CED$. Pēc pieņēmuma $\angle CED = \angle ACE$, tātad $\angle CBE + \angle BCE = \angle ACE$. No taisnleņķa trijstūra ACB seko $\angle CBE = \angle ACD$, tātad $\angle ACD + \angle BCE = \angle ACE = \angle ACD + \angle DCE$, no kurienes seko vajadzīgais (12. zīm.).



12. zīm.



13. zīm.

b) Apzīmēsim W_1 un W_2 rādiusus attiecīgi ar R un r (13. zīm.).

Tad $AE^2 = (R + OE)^2 = R^2 + 2R \cdot OE + OE^2 =$

$$= R^2 + 2R\cdot OE + [(R-r)^2 - r^2] = 2R^2 + 2R(OE - r) =$$
$$= 2R^2 + 2R\cdot OD = 2R\cdot AD.$$

Savukārt no taisnleņķa trijstūru ACB un ADC līdzības seko AC:AB = AD:AC, tāpēc $AC^2 = AB\cdot AD = 2R\cdot AD = AE^2$. Tātad AC = AE.

12.3. a) Pieņemsim no pretējā, ka visiem naturāliem k pastāv nevienādība $a_k>0$. Tā kā virkne ir dilstoša, tad $a_k \le 60$; tāpēc $a_{n+1} \le a_n - \frac{1}{60}$ visiem n. Tāpēc $a_{n+1} \le a_1 - \frac{n}{60} = 60 - \frac{n}{60} < 0$ pie n > 3600 – pretruna.

b) Pieņemsim no pretējā, ka $a_k>0$ visiem $k \le 2004$. Spriežot līdzīgi kā a) punktā, pakāpeniski iegūstam

$$a_{301} < 60 - \frac{300}{60} = 55$$
$$a_{576} < 55 - \frac{275}{55} = 50$$
$$a_{826} < 50 - \frac{250}{50} = 45$$
$$a_{1051} < 45 - \frac{225}{45} = 40$$
$$a_{1251} < 40 - \frac{200}{40} = 35$$
$$a_{1426} < 35 - \frac{175}{35} = 30$$
$$a_{1576} < 30 - \frac{150}{30} = 25$$
$$a_{1701} < 25 - \frac{125}{25} = 20$$
$$a_{1801} < 20 - \frac{100}{20} = 15$$
$$a_{1876} < 15 - \frac{75}{15} = 10$$
$$a_{1976} < 10 - \frac{100}{10} = 0$$ - pretruna.

12.4. Apzīmējam $\sqrt[3]{13x - 12} = y$. Iegūstam sistēmu

$$\begin{cases} x^3 = 13y - 12 \\ y^3 = 13x - 12 \end{cases}$$

Atņemot vienādojumus, iegūstam

$$x^3 - y^3 = 13(y - x)$$
$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 + 13) = 0$$

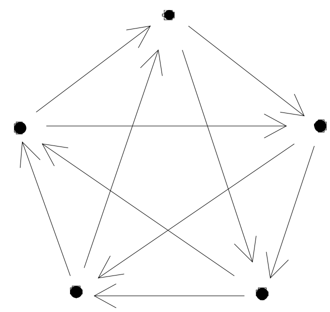
Tā kā $x^2 + xy + y^2 + 13 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 13 > 0$, seko, ka x = y.

Risinām vienādojumu

$$x^3 - 13x + 12 = 0 \text{ jeb}$$
$$(x - 1)(x - 3)(x + 4) = 0.$$

No šejienes $x_1 = 1; x_2 = 3; x_3 = -4$. Pārbaude parāda, ka visas saknes der (pārbaude nepieciešama!).

12.5. a) Var gadīties, ka ir 5 deputāti, kuru „aizspriedumu struktūra" attēlota 14. zīm. Nekādus divus no tiem nevar iekļaut vienā komisijā. Tātad var gadīties, ka nepieciešamas vismaz 5 komisijas.



14. zīm.

b) Parādīsim, ka ar 5 komisijām vienmēr pietiek. Pierādīsim to ar matemātisko indukciju patvaļīgam deputātu skaitam n. Pie n = 1; 2; 3; 4; 5 tas ir acīmredzams (katrā komisijā iekļauj vienu deputātu).

Pieņemsim, ka apgalvojums ir pareizs pie n = 1; 2; 3; ...; m – 1, kur m≥6. Apskatīsim m deputātus. Ja katru no šiem deputātiem „ienīst" vairāk nekā 2 citi, tad kopējais „ienaidu" skaits ir lielāks par 2m, tā ir pretruna, jo katram deputātam ir aizspriedumi pret augstākais 2 citiem, tāpēc „ienaidu" nav vairāk par 2m.

Tāpēc eksistē deputāts A, pret kuru aizspriedumu nav vairāk kā 2 citiem. Apskatīsim visus m-1 deputātus, izņemot A. Saskaņā ar induktīvo hipotēzi tos var sadalīt 5 komisijās vajadzīgā veidā. Deputāts A ir „nepieņemams" ne vairāk kā 4 no tām (jo ir ≤2 deputāti, kam ir aizspriedumi pret viņu, un ir ≤2 deputāti, pret kuriem viņam ir aizspriedumi). Tātad A var pievienot vismaz 1 komisijai. Induktīvā pāreja izdarīta.