LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 54. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Dots, ka a un b – kaut kādi reāli skaitļi. Pierādīt, ka

$$a^2 + ab + b^2 \geq 9(a + b - 3).$$

2. Dots, ka x – naturāls skaitlis. Kāds lielākais daudzums no skaitļiem

$$x;\ x + 2;\ x + 4;\ x + 6;\ x + 8$$

var vienlaicīgi būt pirmskaitļi?

3. Riņķa līnijas W_1 diametram AB pieskaras otra riņķa līnija W_2, kuras centrs atrodas uz W_1. Pierādīt: pieskares, kas no A un B vilktas riņķa līnijai W_2 un kas nesakrīt ar AB, ir paralēlas savā starpā.

4. Uz tāfeles uzrakstīti 2004 skaitļi; viens no tiem ir 1. Ar vienu gājienu atļauts nodzēst vienu skaitli un tā vietā uzrakstīt skaitli a + b - c, kur a, b un c – kaut kādi trīs no nenodzēstajiem skaitļiem. Vai, atkārtojot šādus gājienus vairākas reizes, var panākt, lai uz tāfeles vienlaicīgi būtu uzrakstīti 2004 skaitļi, kas visi vienādi ar 1?

5. Kādā kolektīvā katram cilvēkam ir tieši 3 draugi (ja A ir B draugs, tad arī B ir A draugs). Nav tādu triju cilvēku, kas visi savā starpā draudzētos. Kāds ir mazākais iespējamais cilvēku skaits šajā kolektīvā?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 54. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

---

1. Atrast izteiksmes

$$|x+1| + |x-3| + \big||x+1| - |x-3|\big|$$

mazāko iespējamo vērtību.

2. Naturālu skaitli sauc par palindromu, ja tā decimālais pieraksts ir simetrisks. Piemēram, palindromi ir 11; 505; 4774 utt.
Visi palindromi, sākot ar 11, izrakstīti virknē augošā secībā. Kāda var būt blakus uzrakstītu palindromu starpība, ja zināms, ka tā ir pirmskaitlis?

3. Riņķī ievilkta četrstūra malu garumi ir 1 cm; 1 cm; 2 cm; 3 cm (ne noteikti šajā secībā). Kāds var būt šī četrstūra laukums?

4. Katram no diviem vienādiem regulāriem n-stūriem virsotnes kaut kādā kārtībā sanumurētas ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz n (katrā n-stūrī visi numuri ir dažādi).
Noskaidrojiet, vai noteikti katrā n-stūrī var izvēlēties 3 virsotnes tā, ka vienlaicīgi izpildās sekojošas īpašības:

- abos n-stūros izvēlētas virsotnes ar vieniem un tiem pašiem numuriem,
- pirmajā n-stūrī izvēlēto virsotņu veidotais trijstūris un otrajā n-stūrī izvēlēto virsotņu veidotais trijstūris abi ir viena tipa: vai nu abi ir šaurleņķu, vai abi taisnleņķa, vai abi platleņķa.

Atbildiet uz šo jautājumu, ja a) $n = 5$; b) $n = 6$.

5. Apzīmēsim $f(x) = x^2 + px + q$. Pieņemsim, ka a, b, c, d, e – kaut kādi skaitļi, pie tam $a<b<c<d<e$. Dots, ka $f(a) = f(b + c + d + e)$.
Vai noteikti jāizpildās vienādībām

$$f(a + b) = f(c + d + e),\ f(a + b + c) = f(d + e),\ f(e) = f(a + b + c + d)?$$

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 54. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

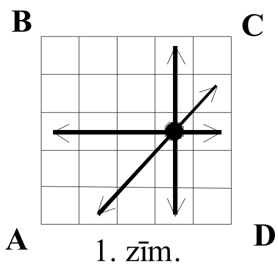
1. Andris izvēlējās 5 dažādus naturālus skaitļus un katriem diviem izvēlētajiem skaitļiem aprēķināja to summu. Kādu daudzumu dažādu summu Andris varēja iegūt?

2. Atrast mazāko tādu naturālu skaitli n, $n > 1$, ka katram veselam x skaitlis $x^n - x$ dalās ar 10.

3. Platleņķa trijstūrim ABC ($\angle B > 90^\circ$) apvilktā riņķa centrs ir O.
Dots, ka $\angle ACO = \angle ACB$. Pierādīt, ka $\angle OBC < 2\angle OBA$.

4. Aplūkosim visus kvadrātvienādojumus ar reāliem koeficientiem $x^2 + px + q = 0$, kam ir vismaz viena reāla sakne un kam $|p| \leq 1$ un $|q| \leq 1$. Kādu apgabalu uz skaitļu ass aizpilda visu šo kvadrātvienādojumu visas saknes?

5. Kvadrāts ABCD sastāv no $n \times n$ vienādām kvadrātiskām rūtiņām, $n > 2$. Par "lēdiju" sauc figūru, kas var atrasties jebkurā rūtiņā; tā apdraud visas tās rūtiņas, kas atrodas ar to vienā horizontālē, vienā vertikālē un vienā "diagonālē", kura paralēla AC (skat. 1.zīm.)



1. zīm.

Kādu mazāko lēdiju skaitu var novietot kvadrātā, lai visas neaizņemtās rūtiņas būtu apdraudētas?

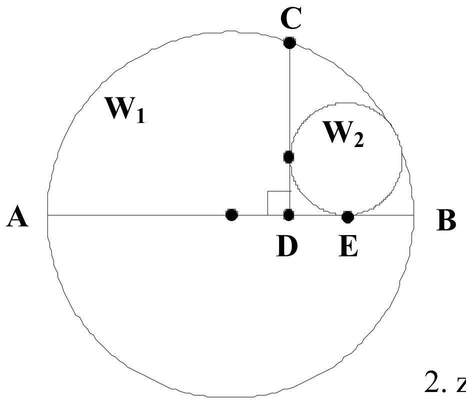
LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 54. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Skaitļu virknē 1; 1; 2; 3; 5;... katrs loceklis, sākot ar trešo, vienāds ar abu iepriekšējo locekļu summu. Noskaidrot, vai ar 6 dalās
a) virknes 24-ais loceklis,
b) virknes 2004-ais loceklis.

2. Dots, ka AB ir riņķa līnijas w_1 diametrs, $DC \perp AB$, bet riņķa līnija w_2 pieskaras CD, AB un riņķa līnijai w_1. Apzīmēsim w_2 un AB pieskāršanās punktu ar E (skat. 2.zīm.).



2. zīm.

a) pieņemot, ka jau pierādīta vienādība AC = AE, pierādīt: CE ir $\angle BCD$ bisektrise,
b) pierādīt vienādību AC = AE.

3. Skaitļu virknē a_1; a_2; a_3; … zināms, ka $a_1 = 60$ un $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{a_n}$ pie $n \geq 1$, ja vien a_n ir definēts un $a_n \neq 0$. Pierādīt:
a) eksistē tāds k, ka $a_k \leq 0$,
b) eksistē tāds k, ka $a_k \leq 0$ un $k \leq 2004$.

4. Atrisināt vienādojumu $x^3 - 13\sqrt[3]{13x-12} + 12 = 0$ reālos skaitļos.

5. Parlamentā ir 100 deputātu. Ir zināms, ka nevienam deputātam nav aizspriedumu pret vairāk nekā 2 citiem deputātiem. (Ja A ir aizspriedumi pret B, tad B var arī nebūt aizspriedumu pret A.)
Kāds ir mazākais komisiju skaits, kurās noteikti var sadalīt jebkura šāda parlamenta deputātus (katram deputātam jāpiedalās vismaz vienā komisijā) tā, ka nevienā komisijā nevienam deputātam nav aizspriedumu ne pret vienu citu?