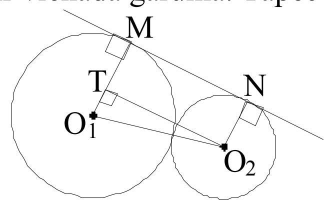
Īsi atrisinājumi.

9.1. Nevienādību pārveido par $(a-5)^2-(a-5)(b-5)+(b-5)^2 \geq 0$ un ievēro, ka $x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2 \geq 0$.

9.2. Šādi pirmskaitļi var būt, piemēram, 23; 41; 59; 67. To summa ir 190. Tā nevar būt citāda, jo cipari 2; 4; 5; 6 nevar būt saskaitāmo pirmskaitļu vienu cipari; tāpēc tie ir desmitu cipari, un meklējamā summa noteikti ir 10(2+4+5+6)+(1+3+7+9)= =10·17+20=190

9.3. a) Tā kā KM=KA (pieskares no viena punkta) un KN=KA (tāpat), tad KM=KN.

b) Abas kopējās ārējās pieskares ir vienāda garuma. Tāpēc no a) seko, ka KL=MN.



No taisnleņķa trijstūra O_1TO_2 seko, ka $MN = TO_2 = \sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$. Tādu pašu rezultātu iegūst, ja R-r=0 un ΔO_1TO_2 reducējas par nogriezni.

9.4. Atbilde: nē, neeksistē.

Risinājums. No sešiem skaitļiem a, b, c, d, e, f, saskaitot tos pa 2, iegūst 15 summas: a+b, a+c, a+d, a+e, a+f, b+c, b+d, b+e, b+f, c+d, c+e, c+f, d+e, d+f, e+f. Pieņemsim, ka iegūtie skaitļi ir visi naturālie skaitļi no 1 līdz 15 ieskaitot. Tad visiem skaitļiem a, b, c, d, e, f jābūt dažādiem. Varam pieņemt, ka a<b<c<d<e<f. Skaidrs, ka vismazākā summa ir a+b, otrā mazākā summa ir a+c, vislielākā summa ir e+f, otrā lielākā summa ir d+f. Tāpēc a+b=1, a+c=2, d+f=14, e+f=15. Tātad
(a+c)-(a+b)=1=(e+f)-(d+f), no kurienes seko c-b=e-d un c+d=b+e. Bet tad ne visas 15 pāru summu skaitliskās vērtības ir dažādas, tātad šīs summas nevar pieņemt visas naturālās vērtības no 1 līdz 15 ieskaitot.

9.5. a) Apzīmējot pāra ciparu ar p, bet nepāra ciparu ar n, tieši pārliecināmies, ka virknes sākums ir $\underline{npnpp}\,\underline{npnpp}\ldots$.

Katru virknes locekli viennozīmīgi nosaka četri iepriekšējie. Redzam, ka virknē ir 2 vienādi četru sekojošu burtu fragmenti $npnp$. Pēc otrās šī fragmenta parādīšanās virkne „attīstīsies" tāpat kā pēc pirmās; tātad tā ir periodiska ar periodu ($npnpp$). Tātad virknē nekur pēc kārtas neparādīsies trīs burti p; tāpēc uzdevumā minētajā virknē nekad neparādīsies pēc kārtas sekojoši cipari 2; 0; 0; 5.

b) **Ja zināmi četru saskaitāmo summas pēdējais cipars un trīs saskaitāmo pēdējie cipari, tad ceturtā saskaitāmā pēdējais cipars ir noteikts viennozīmīgi.**

Aplūkosim visus četru pēc kārtas ņemtu ciparu komplektus tādā secībā, kā tie parādīsies mūsu virknē; daži pirmie komplekti ir 1234, 2340, 3409 utt. Tā kā četru ciparu dažādu komplektu pavisam ir tikai galīgs skaits, tad agri vai vēlu kādam komplektam jāatkārtojas. Aplūkosim **pirmo** šādu atkārtošanos. Mēs apgalvojam, ka tā var būt tikai komplekta 1234 – paša pirmā komplekta – atkārtošanās. Tiešām, ja kā pirmais atkārtotos cits komplekts ω:

$$\ldots\alpha;\ \omega;\ \ldots\ \ldots\ \beta;\ \omega;\ \ldots,$$

tad saskaņā ar augstāk izcelto faktu jābūt α=β, un ω nebūtu pirmais komplekts, kas atkārtojas – pretruna.

Tātad 1; 2; 3; 4 noteikti šajā secībā vēl kādreiz parādīsies mūsu virknē.

10.1. Sākotnēji uzrakstīto skaitļu summa ir 55. Izdarot gājienus, atlikums, ko iegūst, uz tāfeles esošo skaitļu summu dalot ar 3, nemainās. Tātad arī beigu situācijā šis atlikums ir 1, jo $55=18\cdot3+1$.

Ievērosim, ka pēc 1., 2., 3., ... gājiena izdarīšanas uz tāfeles vienmēr ir vismaz viens jaunuzrakstīts skaitlis (t.i., 0; 1; vai 2). Tātad otrais uz tāfeles palikušais skaitlis ir 0; 1 vai 2. Vienīgais no tiem, kas apmierina nosacījumu par summas atlikumu, ir skaitlis 2.

Skaitli 2 var iegūt, piemēram, aizstājot 1+2+3 ar 0 un 0+4+5+6+7+9+10=41 ar 2.

10.2. Tā kā katras malas garums ir mazāks par visu citu malu garumu summu, tad $a\neq b+c+d+e$.

Kvadrātvienādojuma grafika simetrijas dēļ $f(x_1)=f(x_2)$ (kur $x_1\neq x_2$) tad un tikai tad, ja $\frac{x_1+x_2}{2}=x_0$, kur x_0 – parabolas virsotnes abscisa. No dotā seko, ka $a+b+c+d+e=2x_o$.

No tā savukārt seko visas vajadzīgās vienādības.

10.3. Tā kā katrs no n dalībniekiem izcīnīja vismaz vienu un ne vairāk kā n-1 uzvaru, tad viena dalībnieka uzvaru skaits var pieņemt tikai n-1 dažādas vērtības. Tā kā dalībnieku ir n un n>n-1, tad ir divi dalībnieki, kas izcīnījuši vienu un to pašu uzvaru skaitu. Viens no tiem savstarpējā cīņā uzvarējis; apzīmēsim to ar A, bet otru minēto dalībnieku ar B. Lai A un B uzvaru daudzumi būtu vienādi, A jābūt zaudējušam pret kādu no dalībniekiem, pret kuru B ir uzvarējis, šo dalībnieku varam apzīmēt ar C.

10.4. Apzīmēsim ABCD diagonāļu krustpunktu ar O. Tad no $\Delta AOB\sim\Delta NOB$ un $\Delta COD\sim\Delta AOM$ seko

$$\frac{OB}{OD}=\frac{OA}{ON} \text{ un } \frac{OD}{OC}=\frac{OM}{OA}$$

Sareizinot šīs vienādības, iegūstam $\frac{OB}{OC}=\frac{OM}{ON}$, no kā seko vajadzīgais.

10.5. Apzīmēsim uzrakstītos skaitļus ar $1=n_1<n_2<\ldots<n_k=100$. Pie $i=1; 2; ...; k-1$ jābūt $n_{i+1}\leq 2n_i$, citādi n_{i+1} nav izsakāms prasītajā veidā. Tāpēc $n_2\leq2$, $n_3\leq4$, $n_4\leq8$, $n_5\leq16$, $n_6\leq32$, $n_7\leq64$. Tā kā uz lapas atrodas arī 100, tad $k\geq8$. Pierādīsim, ka patiesībā $k\neq8$. Ja $k=8$, tad $n_8=100$. Tā kā $n_7+n_6\leq96$, tad jābūt $100=2n_7$, tāpēc $n_7=50$. Tā kā $n_5+n_6\leq48$, jābūt $n_7=2n_6$, tāpēc $n_6=25$. Tā kā $n_5+n_4\leq24$, tad jābūt $n_6=2n_5$, bet tas nav iespējams, jo n_6 ir nepāra skaitlis.

To, ka n=9 der, parāda piemērs 1; 2; 3; 5; 10; 20; 25; 50; 100 (ir arī citi piemēri).

11.1. Apzīmēsim a=2001. Tad zemsaknes izteiksme ir

$$(a+4)(a+2)(a-2)(a-4)+36=(a^2-16)(a^2-4)+36=a^4-20a^2+100=\left(a^2-10\right)^2,$$

tāpēc uzdevuma atbilde ir $|a^2-10|=2001^2-10=4003991$.

11.2. <u>Atbilde</u>**:** intervālu $\left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

<u>Atrisinājums:</u>

a) ja $|p|\leq1$ un $|q|\leq1$, tad vienādojuma $x^2+px+q=0$ reālai saknei x_o ir spēkā $|x_o|=\left|\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}\right|\leq\left|\frac{p}{2}\right|+\frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Tātad visas saknes pieder minētajam intervālam.

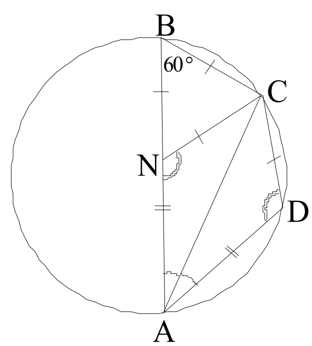
b) vienādojumu $x^2 \pm x - 1 = 0$ saknes ir $\frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}$ un $\frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$. Tātad intervāla galapunkti **ir** vajadzīgā tipa vienādojumu saknes. Pieņemsim, ka $z \in \left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$, tad $z = \alpha \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, kur $|\alpha| \le 1$. Apskatām vienādojumu $x^2 - \alpha x - \alpha^2 = 0$. Ievērojam, ka $|-\alpha| \le 1$ un $|-\alpha^2| \le 1$, un šī vienādojuma saknes ir $\frac{\alpha}{2} \mp \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \alpha^2} = \frac{\alpha}{2} \mp |\alpha| \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}$. Tātad viena no tām ir $\alpha \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = z$. Tātad **visi** apskatāmā intervāla punkti ir vajadzīgā tipa vienādojumu saknes.

11.3. a) Skaitļa 120 apskatāmie dalītāji ir 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 15; 20; 24; 30; 40; 60; 120; to summa ir 360. Viegli redzēt, ka 120=60+40+20=1+2+3+4+5+6+8+10+12+ +15+24+30. Tātad 120 ir viens līdzsvarota skaitļa piemērs.

b) Pieņemsim, ka *n* – līdzsvarots skaitlis, bet *p* – pirmskaitlis, ar kuru *n* nedalās. Tad, ja skaitļa *n* dalītāji ir d_1; d_2; ...; d_k, tad skaitļa $n \cdot p$ dalītāji ir d_1; d_2; ...; d_k, pd_1; pd_2; ...; pd_k. Tāpēc skaidrs, ka arī $n \cdot p$ ir līdzsvarots.

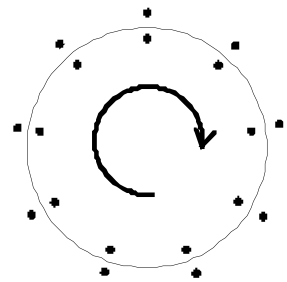
Tā kā pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz, tad, sākot ar 120, var konstruēt aizvien jaunus līdzsvarotus skaitļus (piemēram, nākošais varētu būt 120·7=840).

11.4. Atliekam uz BA tādu punktu N, ka BN=BC. Tad ΔBCN – regulārs, tāpēc ∠CNA=120° un CN=CD. Tā kā ∠B+∠D=180°, tad ∠D=120°; tātad ∠CNA=∠CDA. Tā kā vienādās hordas CB un CD savelk vienādus lokus, tad ∠NAC=∠DAC. Secinām, ka ∠NCA=∠DCA (katrā trijstūrī iekšējo leņķu summa ir 180°). Tāpēc ΔCNA=ΔCDA (*mlm*); tātad NA=DA. No tā seko vajadzīgais.



11.5. a) Pieņemsim, ka tāda pāra nav. Lūgsim katram zēnam uzrakstīt y dažādas kartītes – katru ar savu vārdu un kādu tās meitenes vārdu, kas viņam patīk. Līdzīgu darbu lūgsim izdarīt meitenēm. Tā kā savstarpēju simpātiju nav, tad nav divu kartīšu, uz kurām būtu vienādi uzraksti; tāpēc kartīšu nav vairāk par $n \cdot n = n^2$. No otras puses, kartīšu ir $x \cdot n + y \cdot n = (x+y) \cdot n > n \cdot n = n^2$ – pretruna.

b) Attēlosim meitenes ar punktiem riņķa līnijas iekšpusē, bet zēnus – ar punktiem riņķa līnijas ārpusē (skat. zīm., kur n=9).



Ja katrai meitenei patīk x zēni pulksteņa rādītāja kustības virzienā, sākot ar to, kurš stāv viņai blakus, bet katram zēnam – y meitenes pulksteņa rādītāja kustības virzienā, sākot ar to, kura stāv viņam vienu pozīciju priekšā, tad savstarpēju simpātiju nav.

12.1. Apzīmēsim vienādojuma kreiso pusi ar a; tad labās puses mazināmais ir $a\cdot x$, bet mazinātājs ir $\frac{a}{x}$. Iegūstam vienādojumu $a = ax - \frac{a}{x}$ jeb

$$a\left(1 - x + \frac{1}{x}\right) = 0 .$$

Tā kā pie $x>0$ arī $a>0$, iegūstam $1 - x + \frac{1}{x} = 0$, no kurienes $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (otra sakne neder, jo $x>0$).

12.2. **a)** Pieņemsim no pretējā, ka visiem naturāliem k pastāv nevienādība $a_k>0$. Tā kā virkne ir dilstoša, tad $a_k \le 60$; tāpēc $a_{n+1} \le a_n - \frac{1}{60}$ visiem n. Tāpēc $a_{n+1} \le a_1 - \frac{n}{60} = 60 - \frac{n}{60} < 0$ pie $n > 3600$ – pretruna.

b) Pieņemsim no pretējā, ka $a_k>0$ visiem $k \le 2005$. Spriežot līdzīgi kā a) punktā, pakāpeniski iegūstam

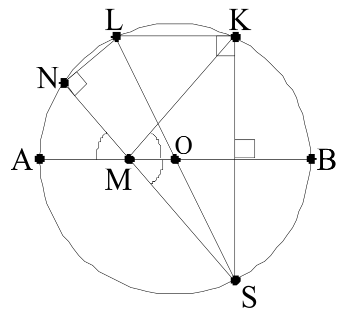
$$a_{301} < 60 - \frac{300}{60} = 55 \qquad a_{1576} < 30 - \frac{150}{30} = 25$$
$$a_{576} < 55 - \frac{275}{55} = 50 \qquad a_{1701} < 25 - \frac{125}{25} = 20$$
$$a_{826} < 50 - \frac{250}{50} = 45 \qquad a_{1801} < 20 - \frac{100}{20} = 15$$
$$a_{1051} < 45 - \frac{225}{45} = 40 \qquad a_{1876} < 15 - \frac{75}{15} = 10$$
$$a_{1251} < 40 - \frac{200}{40} = 35 \qquad a_{1976} < 10 - \frac{100}{10} = 0 \text{ - pretruna.}$$
$$a_{1426} < 35 - \frac{175}{35} = 30$$

12.3. Izmantosim matemātisko indukciju. Ja n=1, vieninieks jau atrodas vajadzīgajā vietā. Pieņemsim, ka apgalvojums ir pareizs pie n=1; 2; ...; m, un apskatīsim situāciju, kad rindā izrakstīti skaitļi no 1 līdz m+1 ieskaitot. Pieņemsim, ka vieninieks nekad neatradīsies pirmajā vietā. Šķirosim divus gadījumus:

a) pirmajā vietā kādreiz atradīsies skaitlis m+1.Tad ar nākošo gājienu tas nonāks pēdējā vietā un tātad turpmāk vairs neizkustēsies. Tāpēc, sākot ar šo brīdi, visas darbības notiks ar skaitļiem no 1 līdz m ieskaitot, un vieninieks nonāks virknes sākumā saskaņā ar induktīvo hipotēzi.

b) Skaitlis (m+1) **nekad** neatradīsies pirmajā vietā. Ja (m+1) jau sākumā atrodas pēdējā vietā, spriežam kā a) gadījumā. Ja nē, (m+1) vienmēr atrodas **starp** pirmo un pēdējo vietu. Tad skaitlis k, kas sākumā atrodas pēdējā vietā, nekad no tās neizkustas. Tāpēc, ja mēs **apmaināmvietām** (m+1) un k, tas neatstās nekādu iespaidu uz vieninieka kustību. Tālāk atsaucamies uz induktīvo hipotēzi.

12.4. Pagarinām NM līdz krustpunktam S ar riņķa līniju. Tā kā $\angle BMS=\angle BMK$, tad K un S ir simetriski attiecībā pret AB. Tā kā $\angle LNS=90°$, tad LS ir diametrs. Tāpēc $\angle LKS=90°$. Tātad $LK\perp KS$ un $AB\perp KS$; tātad $LK\|AB$, k.b.j.



12.5. Apzīmēsim trijstūra malu garumus ar *a*, *b*, *c*; apzīmēsim $a+b+c=x$. No Herona formulas iegūstam

$$L^2=\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}-a\right)\left(\frac{x}{2}-b\right)\left(\frac{x}{2}-c\right) \text{ jeb } 16L^2=x(x-2a)(x-2b)(x-2c)\,.$$

Tā kā $16L^2$ ir pāra skaitlis, tad arī x ir pāra skaitlis. Šķirojam divas iespējas:

1) visi a, b, c ir pāra skaitļi; tad $a=b=c=2$ un $L=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2=\sqrt{3}\notin \mathrm{N}$.

2) viens no skaitļiem a, b, c ir pāra skaitlis, bet divi – nepāra. Varam pieņemt, ka a – pāra skaitlis; tad $a=2$. Ja $b\neq c$, varam pieņemt, ka $b<c$. Tā kā b un c – nepāra pirmskaitļi, tad $c-b\geq 2$, jeb $c-b\geq a$, kas ir pretruna ar trijstūra nevienādību. Tāpēc $b=c$, un iegūstam

$$16L^2=x(x-4)(x-2b)^2$$

$$16L^2=(2b+2)(2b-2)\cdot 4$$

$$(2b+2)(2b-2)=4L^2$$

$$b^2-1=L^2$$

$$(b-L)(b+L)=1$$

$$\text{tāpēc } b-L=\frac{1}{b+L}$$

Acīmredzot tas nav iespējams, jo $b-L\in \mathrm{Z}$, bet $b+L>3$, tāpēc $\frac{1}{b+L}\notin \mathrm{Z}$.