LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 55. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Dots, ka a un b – kaut kādi reāli skaitļi. Pierādīt, ka

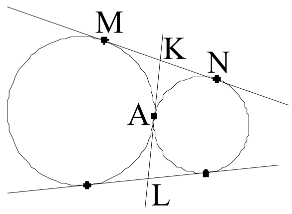
$$a^2 - ab + b^2 \geq 5a + 5b - 25$$

2. Kāda var būt četru tādu divciparu pirmskaitļu summa, kas sastādīti no cipariem 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9, izmantojot katru no tiem tieši vienu reizi?

3. Divas riņķa līnijas ar rādiusiem R un r ārēji pieskaras viena otrai punktā A. Taisne t pieskaras abām riņķa līnijām punktā A un krusto to kopējās ārējās pieskares punktos K un L.

a) pierādīt, ka MK=KN (skat. 1.zīm.);

b) izteikt KL ar R un r.



1. zīm.

4. Vai eksistē tādi 6 skaitļi, ka, aprēķinot visas iespējamās to summas pa diviem, iegūst visus naturālos skaitļus no 1 līdz 15 ieskaitot?

5. Ciparu virkni veido sekojoši: tās pirmie cipari ir 1; 2; 3; 4, bet katrs nākošais vienāds ar četru iepriekšējo summas pēdējo ciparu. (Tātad virkne ir 1; 2; 3; 4; 0; 9; 6; 9; ...)

a) Vai virknē kādreiz pēc kārtas parādīsies cipari 2; 0; 0; 5 tieši šādā secībā?

b) Vai virknē kādreiz pēc kārtas citur nekā sākumā parādīsies cipari 1; 2; 3; 4?

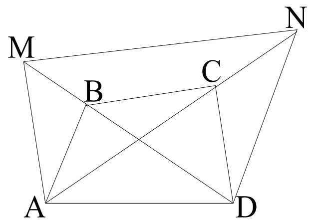
LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 55. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi
10. klase
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Sākumā uz tāfeles uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 10, katrs vienu reizi. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkuru uz tāfeles uzrakstītu skaitļu grupu, nodzēst to un vietā uzrakstīt atlikumu, kādu dod nodzēsto skaitļu summa, dalot ar 3. Pēc vairākiem šādiem gājieniem uz tāfeles palika divi skaitļi; viens no tiem bija 8. Kāds varēja būt otrs skaitlis?

2. Apzīmēsim $f(x) = x^2 + px + q$. Pieņemsim, ka a, b, c, d, e –kāda piecstūra malu garumi. Dots, ka $f(a) = f(b+c+d+e)$.
Vai noteikti jāizpildās vienādībām
$$f(a+b) = f(c+d+e),\ f(a+b+c) = f(d+e),\ f(e) = f(a+b+c+d)?$$

3. Turnīrā piedalās n tenisisti ($n \geq 3$), katrs ar katru citu spēlē tieši vienu reizi. Tenisā neizšķirtu nav. Zināms, ka katrs turnīra dalībnieks izcīnīja vismaz vienu uzvaru. Pierādīt: pēc turnīra beigām var atrast tādus trīs dalībniekus un apzīmēt tos ar A, B un C, ka A uzvarējis pret B, B – pret C, bet C – pret A.

4. Uz izliekta četrstūra ABCD diagonāļu pagarinājumiem ņemti tādi punkti M un N, ka AM||DC un DN||AB (skat. 2.zīm.). Pierādīt, ka BC||MN.



2. zīm.

5. Uz papīra lapas uzrakstīti vairāki dažādi naturāli skaitļi; neviens no tiem nepārsniedz 100. Zināms, ka:
1) 1 un 100 ir uzrakstīti uz lapas,
2) ja n uzrakstīts uz lapas un $n \neq 1$, tad var atrast vai nu tādu uz lapas uzrakstītu skaitli x, ka $n=2x$, vai divus tādus uz lapas uzrakstītus skaitļus x un y, ka $n=x+y$.
Kāds mazākais daudzums skaitļu var būt uzrakstīti uz lapas?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 55. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi
11. klase
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Aprēķināt $\sqrt{2005 \cdot 2003 \cdot 1999 \cdot 1997 + 36}$.

2. Aplūkosim visus kvadrātvienādojumus ar reāliem koeficientiem $x^2 + px + q = 0$, kam ir vismaz viena reāla sakne un kam $|p| \le 1$ un $|q| \le 1$. Kādu apgabalu uz skaitļu ass aizpilda visu šo kvadrātvienādojumu visas saknes?

3. Naturālu skaitli n sauksim par līdzsvarotu, ja tā visus naturālos dalītājus (ieskaitot 1 un pašu n) var sadalīt trīs daļās ar vienādām summām.
- a) atrast kaut vienu līdzsvarotu skaitli,
- b) pierādīt, ka līdzsvarotu skaitļu ir bezgalīgi daudz.

4. Četrstūris ABCD ievilkts riņķa līnijā. Zināms, ka $\angle ABC=60°$ un BC=CD. Pierādīt, ka AB=BC+DA.

5. Kādā klasē ir n zēni un n meitenes. Katrai meitenei patīk x zēni. Katram zēnam patīk y meitenes. Pierādīt, ka:
- a) ja $x+y>n$, tad noteikti var atrast tādu zēnu un tādu meiteni, kas patīk viens otram,
- b) ja $x+y\le n$, tad var gadīties, ka šādu zēnu un meiteni atrast neizdodas.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 55. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi
12. klase
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Atrisināt pozitīvos skaitļos vienādojumu

$$\frac{1}{x+\cfrac{1}{x^2+\cfrac{1}{x^3+\cfrac{1}{x^4}}}}=\frac{1}{1+\cfrac{1}{x^3+\cfrac{1}{x^2+\cfrac{1}{x^5}}}}-\frac{1}{x^2+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x^4+\cfrac{1}{x^3}}}}$$

2. Skaitļu virknē a_1; a_2; a_3; … zināms, ka $a_1=60$ un $a_{n+1}=a_n-\frac{1}{a_n}$ pie $n\geq1$, ja vien a_n ir definēts un $a_n\neq0$. Pierādīt:

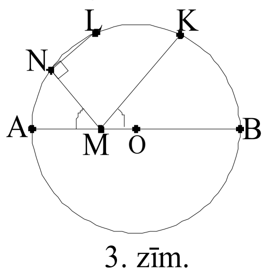
a) eksistē tāds k, ka $a_k\leq0$,

b) eksistē tāds k, ka $a_k\leq0$ un $k\leq2005$.

3. Naturāli skaitļi no 1 līdz n ($n>1$) kaut kādā secībā izrakstīti virknē, katrs vienu reizi. Ja virknē pirmais skaitlis ir k, tad pirmos k locekļus virknē uzraksta pretējā secībā; pārējo locekļu vietas nemaina.

Pierādīt: atkārtojot šādas operācijas, noteikti kādreiz virknes pirmajā vietā atradīsies vieninieks.

4. Dots, ka AB – riņķa līnijas diametrs; M – diametra punkts, kas atšķiras no A un B; N un K – tādi divi riņķa līnijas punkti vienā pusē no AB, ka $\angle NMA=\angle KMB$; L – tāds riņķa līnijas punkts, ka $NL\perp MN$ (skat. 3.zīm.).



3. zīm.

Pierādīt, ka LK||AB.

5. Trijstūra malu garumi izsakās ar pirmskaitļiem. Vai tā laukums var būt naturāls skaitlis? (Malas mēra metros, laukumu – kvadrātmetros.)