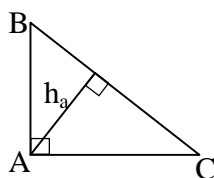

Īsi atrisinājumi.

9.1. Ievērojam, ka $3^{32} - 2^{32} = (3^{16} + 2^{16})(3^8 + 2^8)(3^4 + 2^4)(3^2 + 2^2)(3 + 2)(3 - 2)$ (vairākas reizes lietojam formulu $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$). Tā kā $3 + 2 = 5$; $3^2 + 2^2 = 13$; $3^4 + 2^4 = 97$; $3^8 + 2^8 = 6561 + 256 = 6817 = 17 \cdot 401$, uzdevums atrisināts. (Skaitlis 401 ir pirmskaitlis, jo nedalās ne ar vienu skaitli no 2 līdz $\lfloor \sqrt{401} \rfloor = 20$ ieskaitot.)

9.2. Saskaņā ar teorēmu par slīpnes un perpendikula garumu $CA \geq h_c \geq 5$. Tāpēc $L(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot h_b \geq \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$. Vērtība $L(ABC) = 10$ tiek sasniegta, piemēram, taisnleņķa trijstūrī ABC, kur $AB = 4$; $AC = 5$; $\angle A = 90^\circ$. Šis trijstūris apmierina uzdevuma nosacījumus: $h_b = AB = 4$, $h_c = AC = 5$, $h_a = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{4 \cdot 5}{\sqrt{41}} = \sqrt{\frac{400}{41}} = \sqrt{9 \frac{31}{41}} > \sqrt{9} = 3$ (skat. 4. zīm.)



4. zīm.

9.3. a) Ja visi iespējamie policistu trijnieki ir nodežurējuši pa vienai reizei, tad katrs pāris ir dežurējis kopā ar pieciem citiem policistiem; tātad var būt $n = 5$.

b) attēlosim policistus ar regulāra 7-stūra virsotnēm. Ja pa reizei dežurēs visi tie policistu trijnieki, kuru atbilstošās virsotnes veido vienādsānu trijstūri, iegūsim situāciju ar $n = 3$.

9.4. Vienādojumam $x^2 + ax + b = x^2 + cx + d$ ir sakne $x_0 = \frac{d - b}{a - c}$ (tā eksistē, jo $a \neq c$).

Apzīmējot doto kvadrātrinomu saknes attiecīgi ar $x_1, x_2; x_3, x_4$, iegūstam, ka $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -(a + c)$. Tāpēc $\frac{d - b}{a - c} = -\frac{a + c}{2}$ no kurienes $2d - 2b = c^2 - a^2$. No

Vjeta teorēmas iegūstam $2x_3x_4 - 2x_1x_2 = (x_3 + x_4)^2 - (x_1 + x_2)^2$, no kurienes tieši seko vajadzīgais.

9.5. Iedomāsimies, ka no katras pilsētas pa **katru** ceļu nobrauc automašīna (kopā ir 500 automašīnu). Kopējais nobrauktais attālums ir $2 \cdot 30000 \text{ km} = 60000 \text{ km}$. Automašīnas, kas brauca pa uzdevumā minētajiem īsākajiem ceļiem, kopā nobrauca 10000 km; tāpēc 400 pārējās automašīnas kopā nobrauca 50000 km; tāpēc vismaz viena no tām nobrauca $\geq \frac{50000}{400} = 125 \text{ (km)}$.

10.1. Šādam skaitlim jādalās gan ar 15 (jo $(n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + 8) + \dots + (n + 14) + (n + 15) = 15(n + 8)$), gan ar 17, gan ar 8 (jo $(n + 1) + \dots + (n + 16) = 8((n + 1) + (n + 16))$). Tā kā 15, 17 un 8 ir pa pāriem savstarpēji pirmskaitļi, tam jādalās ar $15 \cdot 17 \cdot 8 = 2040$. Mazākais naturālais skaitlis, kas dalās ar 2040, ir 2040. Viegli pārbaudīt, ka visi 15 (16; 17) saskaitāmie iznāk **naturāli** skaitļi (šī pārbaude nepieciešama).

10.2. Ievērosim, ka $f(x) = (x+4)^2 - 4$. Tāpēc $f(f(x)) = ((x+4)^2 - 4 + 4)^2 - 4 = (x+4)^4 - 4$,
 $f(f(f(x))) = ((x+4)^4 - 4 + 4)^2 - 4 = (x+4)^8 - 4$ un līdzīgi $f(f(f(f(x)))) = (x+4)^{16} - 4$.

Risinot vienādojumu $(x+4)^{16} - 4 = 0$, iegūstam

$$(x+4)^{16} = 4$$

$$x+4 = \pm \sqrt[8]{2}$$

$$x = -4 \pm \sqrt[8]{2}$$

10.3. Saskaņā ar uzdevumā doto ap AMKC var apvilkt riņķa līniju, jo $\angle M + \angle C = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Bez tam $\angle AMC = \angle HMC = 60^\circ$, jo taisnleņķa trijstūrī CHM hipotenūza divas reizes garāka par kateti. Tāpēc no ievilkto leņķu īpašībām $\angle AKC = \angle AMC = 60^\circ$.

10.4. Vispirms reizināsim nevienādības abas puses ar 2. Tālāk nevienādības pareizība seko no identiskiem pārveidojumiem:

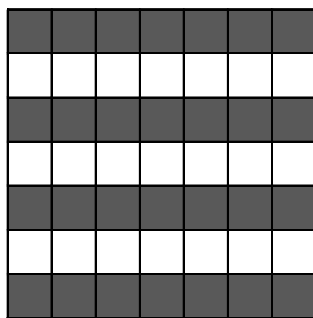
$$2(1+x^2)(1+y^2) - 2x(1+y^2) - 2y(1+x^2) =$$

$$= (1+x^2)(1+y^2) - 2x(1+y^2) + (1+x^2)(1+y^2) - 2y(1+x^2) =$$

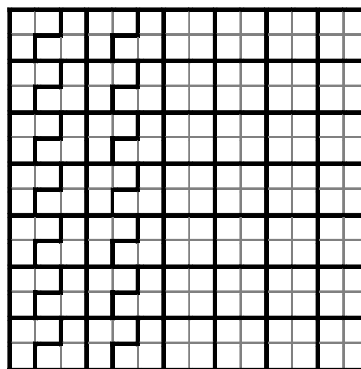
$$= (1-x)^2(1+y^2) + (1-y)^2(1+x^2) \geq 0.$$

10.5. Ja katra veida figūru ir k , tad kopējais rūtiņu skaits tajās ir $4k+3k=7k$; tātad $n^2=7k$ un n jādalās ar 7. Mazākās iespējamās n vērtības ir $n=7$ un $n=14$.

A. Pie $n=7$ uzdevuma prasības nav izpildāmas. Pieņemsim, ka tas izdevies, un izkrāsosim rūtiņas, kā parādīts 5. zīm. Katrs no 7 kvadrātiem satur 2 melnas rūtiņas, tāpēc 7 „stūrīši” kopā satur $28-14=14$ melnas rūtiņas. Tāpēc katrs „stūrītis” satur tieši 2 melnas un 1 baltu rūtiņu (jo katrs stūrītis noteikti satur ne vairāk kā 2 melnas rūtiņas). Bet melnās rūtiņas nevar sadalīties pa pāriem, kas ietilpst kvadrātos un stūrīšos, jo katrā rindiņā, kurā tās vispār ir, tās ir nepāra skaitā.



5. zīm.

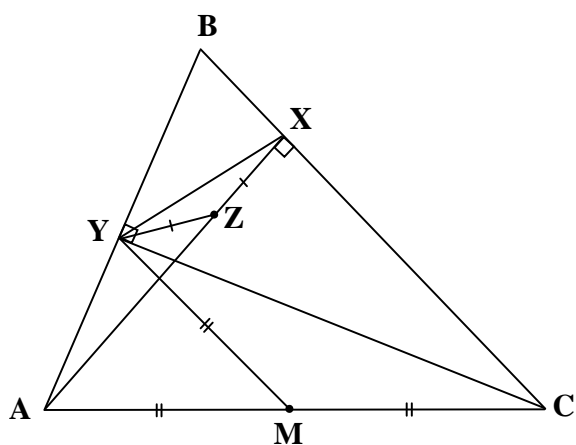


6. zīm.

B. Risinājumu pie $n=14$ skat. 6. zīm.

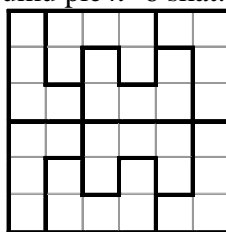
11.1. Tā kā $\angle AYC = 90^\circ = \angle AXC$, tad ap AYXC var apvilkt riņķa līniju; tāpēc $\angle ACY = \angle AXY$ kā ievilkto leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku.

Apzīmēsim $\angle ACY = \angle AXY = \varphi$. Izmantojot trijstūra leņķu summu, viegli iegūt, ka $\angle AMY = 2\varphi$ un $\angle AZY = 2\varphi$, tātad $\angle AMY = \angle AZY$. No šejienes seko vajadzīgais.



7. zīm

- 11.2.** Apzīmēsim katra veida figūru skaitu ar k ; tad tās kopā satur $4k+5k=9k$ rūtiņas. Iegūstam vienādību $9k=n^2$, tātad n dalās ar 3. Mazākās iespējamās n vērtības ir $n=3$ un $n=6$. Vērtība $n=3$ acīmredzami neder. Atrisinājumu pie $n=6$ skat. 8. zīm.



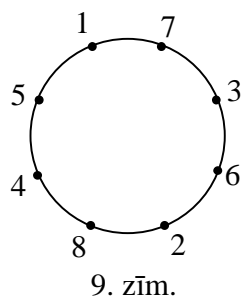
8. zīm.

- 11.3.** No uzdevumā dotā seko, ka gan $2f(x) + g(x)$, gan $f(x) - g(x)$ ir vai nu nenegatīva, vai nepozitīva funkcija. Ja tās abas būtu viena tipa, tad arī to summa $3f(x)$ būtu vai nenegatīva, vai nepozitīva; bet tas ir pretrunā ar to, ka $f(x)$ ir divas dažādas saknes. Tāpēc viens no polinomiem $2f(x) + g(x)$ un $f(x) - g(x)$ ir nenegatīvs, bet otrs – nepozitīvs, turklāt to (vienīgās) saknes atšķiras viena no otras. Bet tad polinoms $(2f(x) + g(x)) - 2(f(x) - g(x)) = 3g(x)$ pieņem vai nu tikai pozitīvas, vai tikai negatīvas vērtības, no kā seko uzdevuma apgalvojums.

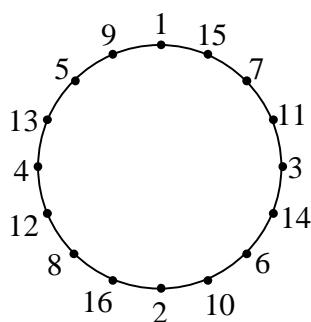
- 11.4.** Viegli aprēķināt, ka $f(1) = 10$, $f(2) = 30$, $f(3) = 100$. Pierādīsim, ka pie $n > 3$ skaitlis $f(n)$ nedalās ar 1000. Tad būs skaidrs, ka uzdevuma atbilde ir „ar 2 nullēm”.

Pie $n > 3$ skaitļi 2^n un 4^n dalās ar 8, bet $1^n = 1$. Savukārt 3^n , dalot ar 8, pārmaiņus dod atlikumus 3 un 1: pie nepāra n , $n = 2k + 1$, iegūstam $3^n = 3^{2k+1} = 3 \cdot 9^k = 3 \cdot (8 + 1)^k = 3 \cdot (8Q + 1) = 24Q + 3$, bet pie pāra n , $n = 2k$, iegūstam $3^n = 3^{2k} = 9^k = (8 + 1)^k = 8P + 1$ ($Q, P \in \mathbf{Z}$). Tāpēc summa $f(n)$ dod atlikumu 4 vai 2, dalot ar 8; tāpēc nedalās ar 8; tāpēc tā nedalās ar 1000.

- 11.5.** a) jā, var; skat. 9. zīm.
 b) nē, nevar. Pieņemam, ka tas izdevies. Apzīmējam skaitļus izrakstīšanas secībā ar a_1 ; a_2 ; ...; a_7 ; varam pieņemt, ka $a_1 < a_2$. Tad jābūt $a_2 > a_3$, $a_3 < a_4$, $a_4 > a_5$, $a_5 < a_6$, $a_6 > a_7$, $a_7 < a_1$, $a_1 > a_2$ – pretruna. (Izšķirošais bija tas, ka 7 – nepāra skaitlis.)
 c) nē, nevar. Apskatām piecas desmitstūra virsotnes, kas veido regulāru piecstūri, un spriežam par tām kā b) gadījumā.
 d) jā, var. Skat. 10. zīm.

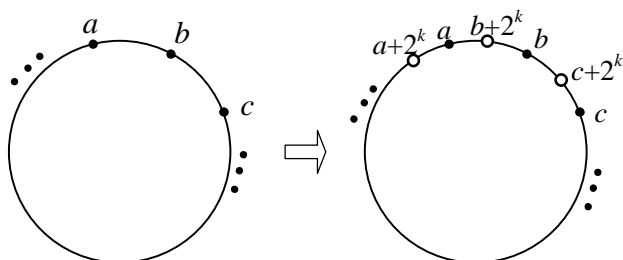


9. zīm.

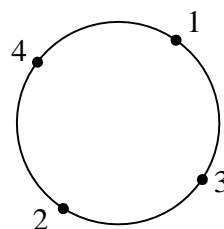


10. zīm.

Komentārs. Uzdevuma prasības ir izpildāmas tad un tikai tad, ja n ir divnieka pakāpe ar naturālu kāpinātāju. Ja n dalās ar kādu nepāra pirmskaitli p , apskatām regulāru p -stūri ar virsotnēm n -stūra virsotnēs un spriežam kā b) gadījumā. Induktīvā pāreja no $n=2^k$ uz $n=2^{k+1}$ shematiski attēlota 11.zīm.; ar tās palīdzību no 12. zīm. iegūts 9. zīm. un no 9. zīm. – 10. zīm.



11. zīm.

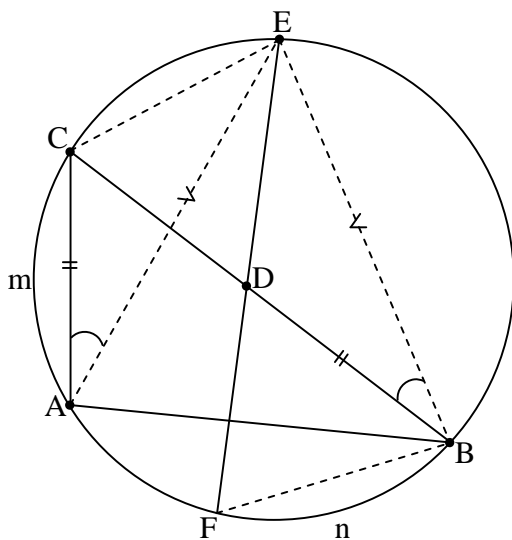


12. zīm.

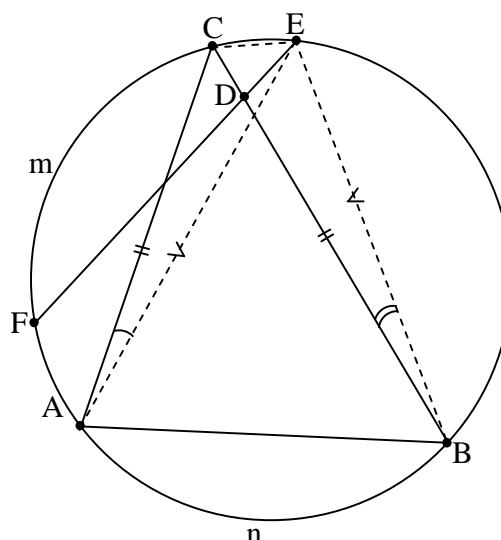
- 12.1.** Padomāsim kā šādu virkni uzrakstīt. Vispirms uzrakstīsim 1; 2; 3; 4; 5; 6; augošā secībā. Skaitļus 7; 8; 9; 10 jāieraksta vai nu intervālos starp šiem skaitļiem, vai pirms vai pēc visiem. No šīm iespējām skaitlim „7” atvēlētas tikai sešas – to nevar rakstīt aiz „6”. Pēc tam skaitļu „8” ierakstīšanai ir astoņas vietas, „9” ierakstīšanai – deviņas vietas un „10” ierakstīšanai – 10 vietas. Tāpēc meklējamo virkņu ir $6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 4320$.
- 12.2.** Tieša pārbaude parāda, ka neder $n=1; 2; 3; 4; 5$, tātad $n \geq 6$. Ja n , dalot ar 3, dod atlikumu 1 resp. 2, tad $n-1$ resp. $n+1$ nav pirmskaitlis. Tāpēc n dalās ar 3. Ja n -nepāra skaitlis, tad $n-1$ un $n+1$ nav pirmskaitļi, tāpēc n dalās ar 2. Tātad n dalās ar 6. Tad n ir dalītāji $1; \frac{n}{6}; \frac{n}{2}; \frac{n}{3}; n$. Bet $\frac{n}{6} + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + n = 2n$. Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem 1 jābūt vienam no skaitļiem $\frac{n}{6}; \frac{n}{2}; \frac{n}{3}; n$. Mums der tikai $1 = \frac{n}{6}$; tad $n = 6$. Pārbaude parāda, ka šī vērtība der.
- 12.3.** Tā kā $|\cos t| \leq 1$, tad $\cos(x^2) + \cos(y^2) - \cos(xy) \leq 1 + 1 - (-1) = 3$. Lai pierādītu stingro nevienādību, jāpierāda, ka nevar vienlaicīgi būt $\cos x^2 = 1$, $\cos y^2 = 1$, $\cos(xy) = -1$. Pieņemsim pretējo. Tad $x^2 = 2\pi m$, $y^2 = 2\pi k$, $xy = \pi(2l+1)$, $n, k, l \in \mathbb{Z}$. No tā seko, ka $x^2 y^2 = 4\pi^2 nk$ un $(xy)^2 = \pi^2 \cdot (2l+1)^2$. No tā seko, ka $4nk = (2l+1)^2$ Bet pāra skaitlis nevar būt vienāds ar nepāra skaitli – pretruna.

12.4. Pastāv 2 gadījumi: a) F pieder lokam AB , b) F pieder lokam AC .

a) no ievilkto leņķu īpašībām $\angle CAE = \angle CBE = \angle DBE$; no E izvēles $AE = BE$; no konstrukcijas $AC = BD$. Tāpēc $\triangle CAE = \triangle DBE$ (mlm). Tāpēc $\angle CEA = \angle DEB = \angle FEB$; vienādi ievilkti leņķi balstās uz vienādiem lokiem. Tāpēc loki AmC un FnB vienādi savā starpā. Pēc teorēmas par paralēlām hordām $AF \parallel CB$, k.b.j.



13.zīm.



14.zīm.

b) iepriekšējā pierādījuma galā aiz teikuma „Tāpēc loki AmC un FnB vienādi savā starpā.” jāiestarpina „Atņemot no tiem abiem loku AF , iegūstam, ka loki FmC un AnB vienādi savā starpā”.

12.5. Skaidrs, ka uz lapām jāraksta skolēnu kopas visas netukšās apakškopas, jo to ir tieši $2^{10} - 1 = 1023$. Identificēsim skolēnus ar skaitļiem $0; 1; 2; \dots; 9$. Ņemsim skolēnu netukšu kopu $A \subset \{0;1;2;\dots;9\}$. Parādīsim, kā izvēlēties krāsu lapai, uz kuras uzrakstīs A .

- Ja $n = 1023$, lapas krāsa noteikti ir balta.
- Ja $n = 0$, lapas krāsa noteikti ir zaļa.
- Apskatām gadījumu, kad $n > 0$ un $n < 1023$.

Izsakām $n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_k}$, kur $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq 9$ - dažādi nenegatīvi veseli skaitļi (t.i., izsakām n binārajā sistēmā). Uzskatīsim skaitļus a_1, a_2, \dots, a_k par baltiem, bet pārējos skaitļus no $\{0;1;2;\dots;9\}$ - par zaļiem. **Krāsosim kopas A lapu tādā krāsā, kādā ir kopas A lielākais elements.**

Tā kā divu kopu apvienojuma lielākais elements ir lielākais no šo kopu lielākajiem elementiem, uzdevuma nosacījums par lapu krāsām izpildās. Noskaidrosim, cik ir balto lapu. Ir tieši 2^{a_i} kopas, kuru lielākais elements ir a_i (katru no skaitļiem $0; 1; \dots; a_i-1$ var iekļaut vai neiekļaut). Tāpēc balto lapu ir $2^{a_1} + \dots + 2^{a_k} = n$, kas bija vajadzīgs.

Piezīme: iespējams arī risinājums ar matemātisko indukciju.