

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 58. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

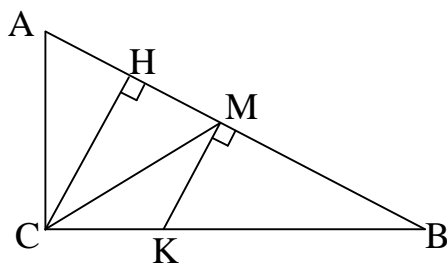
1. Atrodiet vismaz 5 dažādus pirmskaitļus, ar kuriem dalās skaitlis $3^{32} - 2^{32}$.
2. Trijstūrī ABC ar h_a , h_b un h_c apzīmēti to augstumu garumi, kas vilkti attiecīgi no virsotnēm A, B, C. Dots, ka $h_a \geq 3$, $h_b \geq 4$, $h_c \geq 5$.
Kāds ir mazākais iespējamais $\triangle ABC$ laukums?
3. Ceļu policijas vienībā ir 7 policisti. Katru vakaru dežurēt dodas 3 no tiem. Pēc kāda laika izrādījās, ka katri divi policisti kopā dežurējuši tieši n reizes.
 - a) atrodiet kaut vienu iespējamu n vērtību,
 - b) vai var būt, ka $n=3$?
4. Katram no kvadrāttrinomiem $x^2 + ax + b$ un $x^2 + cx + d$ ir divas dažādas saknes; visi skaitļi a , b , c , d ir dažādi. Minēto četru sakņu summas puse ir vienādojuma $x^2 + ax + b = x^2 + cx + d$ sakne. Pierādīt, ka pirmā kvadrāttrinoma sakņu kvadrātu summa vienāda ar otrā kvadrāttrinoma sakņu kvadrātu summu.
5. Kādā valstī ir 100 pilsētas. No katras pilsētas iziet 5 ceļi. Katrs ceļš savieno divas pilsētas, neiegriežoties citās; starp katrām divām pilsētām ir ne vairāk par vienu ceļu; visu ceļu garumi ir dažādi. Visu ceļu kopgarums ir 30 000 km. Ja izvēlas katrai pilsētai visīsāko no tās izejošo ceļu un saskaita visu 100 izvēlēto ceļu garumus (varbūt dažu ceļu garumus ieskaita summā divreiz), iegūst 10 000 km. Pierādīt, ka šajā valstī ir tāds ceļš, kura garums nav mazāks par 125 km.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 58. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

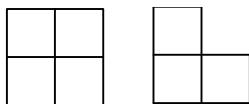
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Atrodiet mazāko naturālo skaitli, ko var izsacīt gan kā 15, gan kā 16, gan kā 17 pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summu.
2. Dots, ka $f(x) = x^2 + 8x + 12$. Atrisināt vienādojumu $f(f(f(f(x)))) = 0$.
3. Dots, ka $\triangle ABC$ ir taisnleņķa, $\angle ACB = 90^\circ$. Zināms, ka CH ir šī trijstūra augstums, $CM = 2 \cdot HM$ un $KM \perp AB$ (skat. 1. zīm.). Aprēķināt $\angle AKC$.



1. zīm.

4. Dots, ka x un y - reāli skaitļi. Pierādīt, ka $(1 + x^2)(1 + y^2) \geq x(1 + y^2) + y(1 + x^2)$.
5. Kvadrāts sastāv no $n \times n$ vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Ir zināms, ka to var sagriezt tādos gabalos, kādi parādīti 2. zīm., pie tam abu veidu gabali ir vienādā skaitā. Atrast mazāko iespējamo n vērtību.



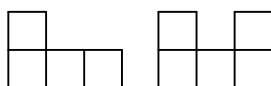
2. zīm.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 58. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkta augstumi AX un CY ; malas AC viduspunkts ir M . Uz augstuma AX atzīmēts tāds punkts Z , ka $YZ=ZX$. Pierādīt, ka punkti A ; Y ; Z ; M atrodas uz vienas riņķa līnijas.
2. Kvadrāts sastāv no $n \times n$ vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Ir zināms, ka to var sagriezt tādos gabalos, kādi parādīti 3. zīm., pie tam viena veida gabalu ir tikpat, cik otra. Atrast mazāko iespējamo n vērtību.



3. zīm.

3. Ir zināms, ka $f(x)$ un $g(x)$ - kvadrāttrinomi, pie tam gan $2f(x) + g(x)$, gan $f(x) - g(x)$ ir tāds kvadrāttrinoms, kuram ir tikai viena sakne (jeb, citādi sakot, abas saknes ir vienādas). Dots arī, ka kvadrāttrinomam $f(x)$ ir divas dažādas saknes. Pierādīt, ka kvadrāttrinomam $g(x)$ sakņu nav.
4. Apzīmējam $f(n) = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$, $n=1; 2; 3; \dots$. Ar kādu lielāko daudzumu nulļu var beigties skaitlis $f(n)$?
5. Regulāra n -stūra virsotnēs ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz n (katrā virsotnē cits skaitlis) ar īpašību: ja A, B, C – trīs n -stūra virsotnes un $AB=AC$, tad virsotnē A ierakstītais skaitlis vai nu lielāks par **abiem** skaitļiem, kas ierakstīti virsotnēs B un C , vai arī mazāks par tiem abiem.

Vai var būt, ka a) $n = 8$, b) $n = 7$, c) $n = 10$, d) $n = 16$?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 58. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. No 10 skaitļiem izveidotu virkni sauc par **labu**, ja tā vienlaicīgi apmierina šādas 3 prasības:
 - a) tā satur visus naturālos skaitļus no 1 līdz 10 ieskaitot,
 - b) ja no virknes izsvītro trīs skaitļus 8, 9 un 10, tad atlikušie 7 virknes locekļi nav augošā secībā,
 - c) ja no virknes izsvītro **vēl arī** skaitli 7, tad atlikušie virknes locekļi ir augošā secībā.Cik ir labu virkņu? Atbilde jānodod decimālā pierakstā.

2. Kādiem naturāliem skaitļiem n vienlaicīgi piemīt sekojošas īpašības:
 - a) $n-1$ un $n+1$ ir pirmskaitļi,
 - b) skaitļa n visu naturālo dalītāju summa (ieskaitot 1 un n) ir $2n$?

3. Pierādīt, ka visiem reāliem skaitļiem x un y pastāv nevienādība
$$\cos(x^2) + \cos(y^2) - \cos(xy) < 3.$$

4. Trijstūrī ABC dots, ka $AC < BC$. Apzīmējam apvilktu riņķa līniju ar w . Punkts E ir viduspunkts tam no w lokiem AB , kurš satur C . Punkts D atrodas uz nogriežņa BC un $BD = AC$. Stars ED krusto w punktā F , kas nesakrīt ar A . Pierādīt, ka $AF \parallel BC$.

5. Klasē ir 10 skolēni. Viņiem jāreģistrējas 1023 eksāmenu kārtošānai, turklāt nedrīkst būt divu tādu eksāmenu, kurus kārtoti vieni un tie paši skolnieki. Katru eksāmenu jākārtoti vismaz vienam skolniekam. Dots, ka n – vesels skaitlis, $0 \leq n \leq 1023$. Pierādīt, ka eksāmenam reģistrējušos skolnieku sarakstus var nodrukāt uz baltām un zaļām lapām tā, ka vienlaicīgi izpildās šādas prasības:
 - ja divas lapas X un Y ir vienā krāsā, tad tā lapa, uz kuras pierakstīti tieši tie skolnieki, kas pierakstīti vismaz uz vienas no lapām X un Y , ir tādā pašā krāsā kā X un Y ,
 - ir tieši n baltas lapas.