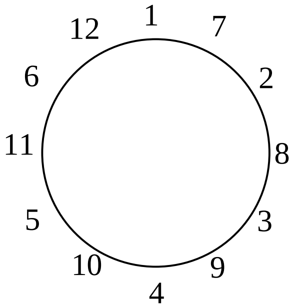
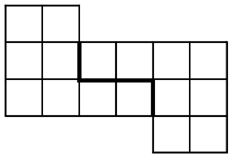
Īsi atrisinājumi.

5.1. a) Jā, var. Skat., piem., 1. zīm.



1. zīm.



2.zīm.

b) nevar; skaitlim 6 blakus var būt tikai 12.

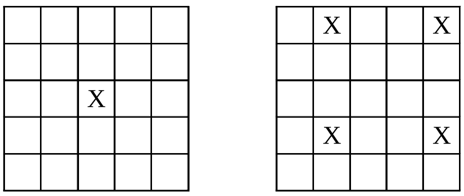
5.1. Skat., piem., 2.zīm.

5.3. a) nē; izsvītrojot 5, palikušais skaitlis nevar dalīties ar 5.
b) jā; piem., skaitlis 154320.

5.4. Jā. Piemēram, izkrāsojam rūtiņas šaha galdiņa secībā, baltajās rūtiņās ierakstām skaitļus no 1 līdz 8, bet melnajās – no 9 līdz 16.

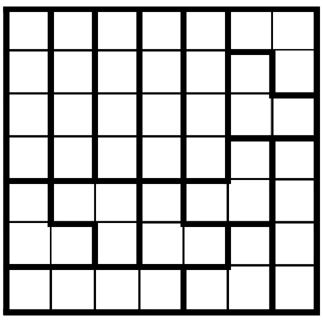
5.5. Andra „kods" var būt divciparu, trīsciparu vai četrciparu. To atšifrējot, problēmas var radīt tikai trīsciparu kodi, pie tam tikai tādi, kam pēdējais cipars ir 1 vai 2; tad priekšpēdējais cipars noteikti ir 1. Tā kā janvārī ir 31 diena, iegūstam 111; 211; 311; tā kā februārī ir augstākais 29 dienas, iegūstam 112 un 212. Tātad pavisam ir 5 šādi kodi.

6.1. Skat., piem., 3.zīm.



3.zīm.

6.2. a) nē. 12 figūriņām ir pats lielākais $12 \cdot 4 = 48 < 7 \cdot 7$ rūtiņas;
b) jā. Skat., piem., 4. zīm.



4. zīm.

	K1	K2	K3	K4	K5	K6
R1	X	X	X			
R2	X			X	X	
R3		X		X		X
R4			X		X	X

5.zīm.

6.3. a) nē. Ja kastu būtu n, tad rūķīšu piedalīšanos kopā būtu gan $2 \cdot n$, gan $5 \cdot 3$. Bet naturālam n nevar pastāvēt vienādība $2n = 15$.

b) jā. Skat., piem., 5.zīm.

6.4. Nē. Spriežam no pretējā. Šķirojam divas iespējas:

a) saskaitīšanā pārnesums nerodas. Tad katrā šķirā tiek saskaitīts pāra cipars un nepāra cipars. Tātad tiem jābūt vienādā skaitā, bet 7 nedalās ar 2.

b) kādā šķirā rodas pārnesums. Aplūkojam pašu labējo no šādām šķirām. Tur saskaitīti divi piecinieki (citādi summu, kas ir vismaz 10, iegūt nevar); bet tad summā šajā šķirā rodas pāra cipars 0.

6.5. Pierādīsim, ka pietiek ar 1 svēršanu. Uzliekam uz kausiem pa 67 monētām. Ja svari nav līdzsvarā, vajadzīgās monētu kaudzītes atrodas uz kausiem. Ja svari ir līdzsvarā, tad par meklējamām kaudzītēm der malā palikušās 66 monētas un jebkuras 66 monētas no viena svaru kausa. Pierādīsim to.

Tiešām, ja malā palikušās 66 monētas kopā sver tikpat, cik 66 monētas no 1. kausa, tad šajos komplektos ir vienāds skaits (apzīmēsim to ar x) „vieglo monētu". Tad uz 1. kausa atrodas vai nu x, vai x + 1 „vieglā" monēta (atkarībā no tā, vai 67-ā monēta uz šī kausa ir „smagā" vai „vieglā"). Atbilstoši uz otrā svaru kausa ir vai nu x, vai x + 1 „vieglā monēta" (jo kausi atrodas līdzsvarā). Tātad pavisam vieglo monētu ir vai nu $2x + x = 3x$, vai $2(x+1) + x = 3x + 2$. Bet ne vienādojumam $3x = 100$, ne vienādojumam $3x + 2 = 100$ nav atrisinājuma veselos skaitļos. Iegūta pretruna, tātad mūsu pieņēmums nepareizs un malā palikušo monētu svars noteikti atšķiras no 1. kausa jebkuru 66 monētu kopējā svara. Tieši tāpat pierāda, ka malā palikušo monētu kopējais svars noteikti atšķiras no 2. kausa jebkuru 66 monētu kopējā svara.

Skaidrs, ka pavisam bez svēršanas prasītās monētu kaudzītes atrast nevar. Tātad meklējamais minimums ir 1.

7.1. Visus: $n = (n^7)^3 : (n^4)^5$.

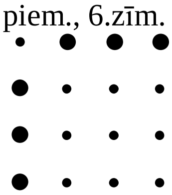
7.2. **a)** ar katru gājienu skaitļu skaits samazinās par 1. Tā kā tas dilst no 2009 līdz 1, tad pavisam izdarīs $2009 - 1 = 2008$ gājienus.

b) uzrakstīto skaitļu summa paliek nemainīga. Tāpēc pēdējais palikušais skaitlis būs 2009.

7.3. **a)** pieņemsim, ka a dalītāji ir $1 < a_1 < a_2 < a$, bet b dalītāji ir $1 < b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b$. Tad $1 < b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b < a_1 b < a_2 b < ab$ ir 9 dažādi skaitļa ab dalītāji.

b) jā; piemēram, ja $a = 8$, $b = 32$ un $ab = 256$.

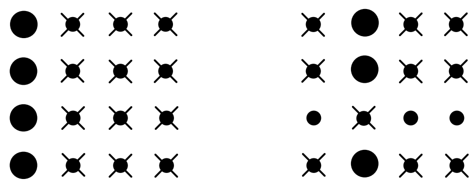
7.4. a) var nokrāsot 6 punktus; skat., piem., 6.zīm.



6.zīm.

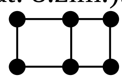
b) pierādīsim, ka 7 vai vairāk punktus nokrāsot nevar. Pieņemsim no pretējā, ka tas izdevies. Šķirojam gadījumus.

b1) ir kolonna, kurā nokrāsoti 3 vai vairāk punkti. Tātad tajās rindās, kurās ir šie punkti, citu nokrāsotu punktu nav. Tāpēc vēl var nokrāsot vai nu 0, vai augstākais 3 punktus (skat. 7.zīm.).



7.zīm.

b2) nevienā kolonnā nav nokrāsoti vairāk par 2 punktiem. Ņemam kolonnu α, kurā nokrāsoti 2 punkti (tāda noteikti eksistē); pieņemsim, ka tie ir rindās β un γ. Citi nokrāsotie punkti var atrasties tikai ārpus α, β un γ. Tur pavisam ir 6 taisnstūra režģa veidā izvietoti punkti (skat. 8.zīm.).



8.zīm.

Viegli pārbaudīt: lai kurus 5 punktus no šiem 6 nokrāsotu (t.i., tikai vienu atstātu nenokrāsotu), uzdevumā minētais taisnleņķa trijstūris eksistē. Iegūta pretruna.

7.5. Sprīdītis nosūta vienu rūķīti A izlūkos pa vienu ceļu, divus citus rūķīšus B un C izlūkos pa otru ceļu, bet pats dodas izlūkos pa trešo ceļu. Visiem pieteikts pēc divām dienām atgriezties ceļu sazarojuma vietā.

Ja Sprīdītis konstatē, ka Laimīgā Zeme sasniedzama pa viņa izvēlēto ceļu, tad viņš rūķīšus nemaz neaptaujā, bet kopā ar visiem dodas uz mērķi. Aplūkosim gadījumus, kad Sprīdītis savā izlūkgājienā Laimīgo Zemi nav sasniedzis. Tad viņš jautā visiem rūķīšiem, vai viņi ir sasnieguši Laimīgo Zemi. Šķirojam divas iespējas.

a) B un C atbildes ir dažādas. Tātad viens no viņiem ir neuzticams. Tātad A noteikti runā patiesību. Balstoties uz A teikto un sava izlūkgājiena rezultātiem, Sprīdītis izvēlas pareizo ceļu;

b) B un C atbildes ir vienādas. Tad tās abas nevar būt nepareizas; tātad tās ir pareizas. (Ievērojiet: mēs neapgalvojām, ka B un C abi vienmēr runā patiesību!). Balstoties uz B un C teikto un sava izlūkgājiena rezultātiem, Sprīdītis izvēlas pareizo ceļu.

8.1. Apskatīsim divus iespējamos risinājumus.

A. Sadalīsim katrā rūtiņā ierakstīto skaitli divos saskaitāmajos, kā parādīts 9.zīm.

1+0	1+2	1+4	1+6
9+0	9+2	9+4	9+6
17+0	17+2	17+4	17+6
25+0	25+2	25+4	25+6

9.zīm.

Ievērosim, ka katrā rindiņā ir vienādi pirmie saskaitāmie, bet katrā kolonnā – otrie. Tā kā no katras **rindiņas** ņemta viena rūtiņa, tad visu izvēlēto skaitļu **pirmo** saskaitāmo summa ir $1+9+17+25=52$; līdzīgi, tā kā no katras kolonnas ņemta viena rūtiņa, tad visu izvēlēto skaitļu **otro** saskaitāmo summa ir $0+2+4+6=12$. Atliek ievērot, ka $52+12=64$.

B. Minētās 4 rūtiņas var izvēlēties tikai 24 veidos; visas šīs summas var tieši aprēķināt un konstatēt, ka katra no tām ir 64.

8.2. No nevienādības $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0$, atverot iekavas, seko $a^2+b^2+c^2>ab+ac+bc$.

8.3. Ievērosim, ka $113^{113}=\left(113^{4}\right)^{28}\cdot 113$ un 113^{4} beidzas ar ciparu 1 ($3^{4}=81$). Tāpēc 113^{113} beidzas ar ciparu 3. Līdzīgi $19^{19}=\left(19^{2}\right)^{9}\cdot 19=(...1)^{9}\cdot 19$ beidzas ar ciparu 9. Tāpēc $113^{113}-19^{19}$ beidzas ar ciparu 4.

8.4. Pieņemsim, ka trešajā svēršanā uz kreisā kausa akmeņu kopējā masa bija x, bet uz labā kausa – y. Pārējie akmeņi, kas pirmajā svēršanā bija uz kreisā kausa, otrajā svēršanā bija uz labā, un otrādi.Apzīmējot šīs kopējās masas attiecīgi ar a un b, iegūstam

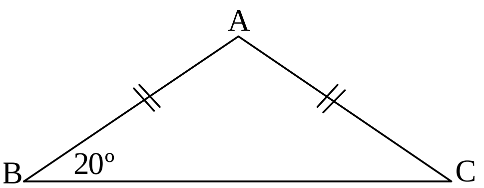
$$a+x=b+y$$

$$b+x=a+y$$

Saskaitot šīs vienādības, iegūstam vajadzīgo.

8.5. Šķirojam 3 gadījumus.

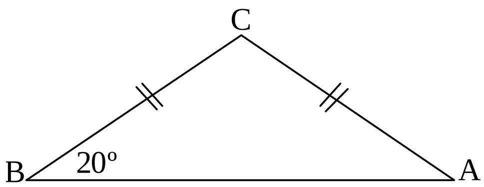
I



10.zīm.

$3\cdot AC=3\cdot AB>AB$.

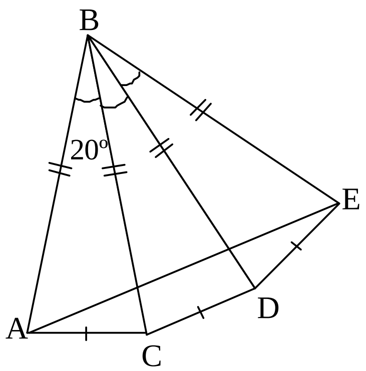
II



11.zīm.

$3\cdot AC>2\cdot AC=AC+CB>AB$.

III



12.zīm.

Tā kā $\angle ABE=60°$ un $BA=BE$, tad ΔABE ir vienādmalu. Tāpēc $3AC=AC+CD+DE>AE=AB$.

Īsi norādījumi vērtēšanai.

5.1. Par katru daļu – 5 punkti.

5.3. Par katru daļu – 5 punkti.

5.4. Par nepareiziem piemēriem – ne vairāk kā 2 punkti.

5.5. Par katru pareizu piemēru 1 punkts; pārējie 5 punkti „par spriedumiem”.

6.1. Par katru daļu 5 punkti. Pietiek ar zīmējumu. Par nepareizu piemēru ≤1 punkts.

6.2. Par katru daļu 5 punkti.

6.3. Par katru daļu 5 punkti.

6.4. Ja nav apskatīta viena no abām principiāli dažādajām iespējām – ≤5 punkti. Par atsevišķiem piemēriem ≤2 punkti.

6.5. Par stratēģiju ar vairāk kā 1 svēršanu, pat ja tā ir pareiza – ne vairāk par 5 punktiem.

7.1. Par atsevišķiem piemēriem ≤2 punkti.

7.2. Par katru daļu 5 punkti.

7.3. Par katru daļu 5 punkti.

7.4. Par pareizu piemēru – 5 punkti.

7.5. Par stratēģiju ar >3 dienām – ne vairāk kā 5 punkti.

8.1. Par atsevišķu piemēru pārbaudi, ja netiek pārbaudīti visi gadījumi – ne vairāk kā 5 punkti.

8.2. Par skaitliskiem piemēriem – ne vairāk kā 2 punkti.

8.3. Par pareizu ideju ar kļūdu aprēķinos – līdz 5 punktiem.

8.4. Par atsevišķu piemēru apskatīšanu – līdz 2 punktiem.

8.5. Par viena gadījuma apskatīšanu – līdz 3 punktiem,
par divu gadījumu apskatīšanu – līdz 6 punktiem.

Labu veiksmi Jums un Jūsu skolēniem!

A.Liepas NMS