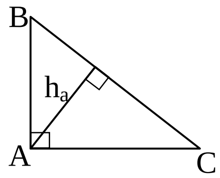
Īsi atrisinājumi.

9.1. Saskaņā ar teorēmu par slīpnes un perpendikula garumu $CA \geq h_c \geq 13$. Tāpēc $L(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot h_b \geq \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 12 = 78$. Vērtība L(ABC)=78 tiek sasniegta, piemēram, taisnleņķa trijstūrī ABC, kur AB=12; AC=13; $\angle A = 90°$. Šis trijstūris apmierina uzdevuma nosacījumus: $h_b = AB = 12$, $h_c = AC = 13$, $h_a = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{12 \cdot 13}{\sqrt{313}} > \frac{12 \cdot 13}{18} > 5$ (skat. 4.zīm.)



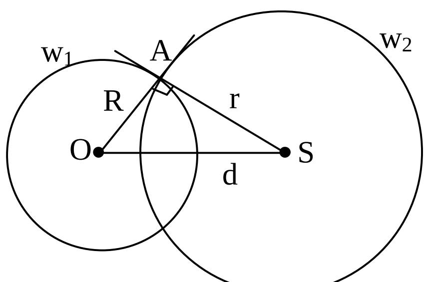
4. zīm.

9.2. Apzīmējam četrciparu skaitļa n pirmo divu ciparu veidoto skaitli ar a, bet pēdējo divu ciparu veidoto skaitli ar b. Tad n=100a+b, tāpēc iegūstam $100a+b=b^2$ un $25 \cdot 4 \cdot a = b(b-1)$. Tā kā LKD(b,b-1)=1, tad vai nu b, vai b-1 dalās ar 25. Tāpēc b varbūt iespējamās vērtības ir 00; 01; 25; 26; 50; 51; 75; 76. Atbilstoši a vērtība iznāk divciparu naturāls skaitlis tikai pie b=76, tad a=57. Tāpēc ir tikai viens meklējamais skaitlis n=5776.

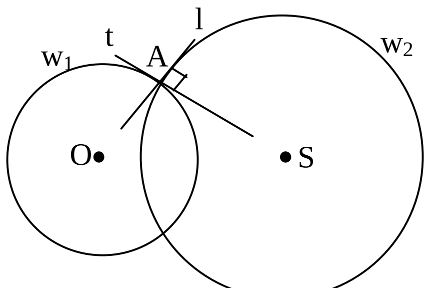
9.3. Atceramies, ka

a) pieskare ir perpendikulāra rādiusam, kura galapunktā tā novilkta,
b) tātad taisne, kas novilkta perpendikulāri rādiusam tā galapunktā, ir pieskare.

1. Pieņemsim, ka $R^2+r^2=d^2$. Novelkam rādiusus uz r.l. krustpunktu A. Tad $OA^2+SA^2=OS^2$, tātad pēc Pitagora teorēmai apgrieztās teorēmas ΔOAS ir taisnleņķa. Tāpēc taisne SA (pēc augšminētā b) punkta) ir r.l. w_1 pieskare, un tāpat taisne OA ir w_2 pieskare. Tātad abas pieskares punktā A ir savstarpēji perpendikulāras.



5. zīm.



6. zīm.

2. Pieņemam, ka pieskares krustpunktā A ir savstarpēji perpendikulāras (6. zīm.).
   Tā kā $t \perp l$, tad t satur w_2 rādiusu, tātad iet caur S. Līdzīgi l iet caur O. Tāpēc ΔOAS ir taisnleņķa, un no Pitagora teorēmas seko vajadzīgais.

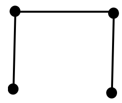
9.4. Apzīmēsim saknes ar x_1 un x_2, kur $x_1<x_2$. Tad pie $x \notin (x_1; x_2)$ $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2) \geq 0 > -1$. Ja $x \in (x_1; x_2)$, tad $\left|x^2+px+q\right| = \left|(x-x_1)(x_2-x)\right| = (x-x_1)\cdot(x_2-x) \leq$

$$\leq \left(\frac{(x-x_1)+(x_2-x)}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1,$$

no kā seko vajadzīgais.

9.5. a) Pieņemsim pretējo, ka tādu divu cilvēku nav. Tā kā cilvēku ir tieši n un paziņu daudzums vienam cilvēkam var būt 0; 1; 2; ...; n-1 (t.i., tieši n dažādas vērtības), tad katrai šai vērtībai „jārealizējas"; t.sk. jārealizējas arī paziņu daudzumiem 0 un n-1. Bet tas nav iespējams: ja ir kāds, kam nav neviena paziņas, tad nevar būt neviena, kas pazīst visus n-1 citus. Iegūta pretruna.

b) Pie n=4 var gadīties, ka trešā cilvēka nav: skat, piem., 7. zīm., kur punkti attēlo cilvēkus, bet līnijas – pazīšanās.

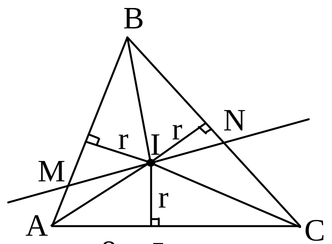


7. zīm.

Pie n=2009 tādi cilvēki noteikti atradīsies. Pieņemsim pretējo: nekādiem diviem cilvēkiem ar vienādiem paziņu daudzumiem minētā trešā cilvēka nav. Ņemsim divus cilvēkus A un B ar vienādiem paziņu daudzumiem (tādi eksistē saskaņā ar a) punktu). Katru no pārējiem n-2 cilvēkiem pazīst <u>tieši viens</u> no A un B, tāpēc n-2 jādalās ar 2 (citādi A un B paziņu daudzumi neiznāktu vienādi). Tāpēc n jābūt pāra skaitlim. Bet 2009 ir nepāra.

10.1. Šādam skaitlim jādalās gan ar 11 (jo $(n+1)+(n+2)+...+(n+10)+(n+11)=11(n+6)$), gan ar 13, gan ar 6 (jo $(n+1)+(n+2)+...+(n+12)=6\big((n+1)+(n+12)\big)$). Tā kā 11, 13 un 6 ir pa pāriem savstarpēji pirmskaitļi, tad tam jādalās ar 6·11·13=858. Mazākais naturālais skaitlis, kas dalās ar 858, ir 858. Viegli pārbaudīt, ka visi 11 (12; 13) saskaitāmie iznāk **naturāli** skaitļi (<u>pārbaude nepieciešama</u>).

10.2. $L(MBN)=L(MIB)+L(NIB)=\frac{1}{2}r\cdot(MB+BN)$**;** $L(ABC)=\frac{1}{2}r\cdot(AB+BC+CA)$**.** Ja $L(MBN)=\frac{1}{2}L(ABC)$, tad no $\frac{1}{2}r(MB+BN)=\frac{1}{4}r(AB+BC+CA)$ seko $MB+BN=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$, k.b.j.



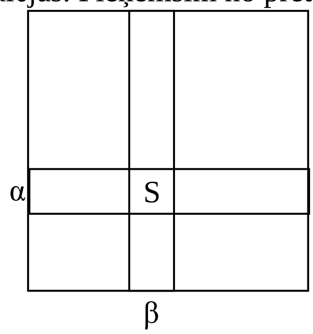
8. zīm.

10.3. Tā kā a^2 dalās ar b un a dalās ar a, tad $a^3=a^2\cdot a$ dalās ar b·a. Līdzīgi pierāda, ka b^3 dalās ar ab. Tāpēc arī $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ dalās ar ab. Ja a=2 un b=4, tad $(a+b)^2=36$ nedalās ar a·b=8.

10.4. Pārveidojam vienādojumu par $x+y+z=2\sqrt{x-1}+4\sqrt{y-4}+6\sqrt{z-9}$ un tālāk par $\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-4}-2\right)^2+\left(\sqrt{z-9}-3\right)^2=0$. Tā kā kvadrāti ir nenegatīvi, tad katrs no tiem ir 0. No šejienes viegli iegūt x=2; y=8; z=18.

10.5. <u>Atbilde</u>: ar 100 pieskāršanās reizēm.

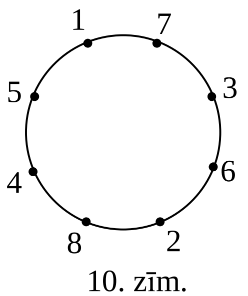
Risinājums: a) pieskaroties katrai spuldzei 1 reizi, katra spuldze maina savu stāvokli 19 (nepāra skaitu) reižu, tātad gala rezultātā no izslēgtas kļūst par ieslēgtu.
b) pierādīsim, ka 100 ir meklētais minimums. Skaidrs, ka varam apskatīt situāciju, kad katrai spuldzei vai nu nepieskaras nemaz, vai pieskaras vienu reizi, jo divas pieskāršanās vienai spuldzei savstarpēji anulējas. Pieņemsim no pretējā, ka kādai spuldzei S nepieskaras.



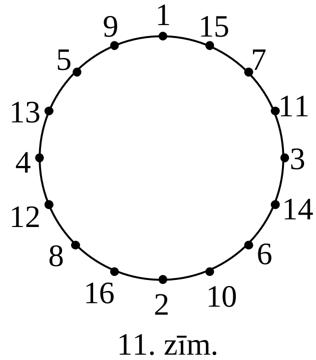
9. zīm.

Tad rindā α un kolonnā β kopā jābūt nepāra skaitam pieskāršanos; varam pieņemt, ka rindā α ir nepāra skaits pieskāršanos. Šo pieskāršanos dēļ katra spuldze rindā α mainījusi savu stāvokli nepāra skaitu reižu; tāpēc katrā kolonnā jābūt pāra skaitam pieskāršanos ārpus α. Tāpēc kopīgais pieskāršanos skaits ārpus α ir pāra skaitlis. Pieskaitot vēl pieskāršanās rindā α, kopējais pieskāršanos skaits ir nepāra skaitlis. Katra pieskāršanās izsauc izmaiņas 19 spuldzēs, tāpēc kopējais izmaiņu skaits S ir nepāra skaitlis. Bet katra no 100 spuldzēm maina savu stāvokli nepāra skaitu reižu, tāpēc S kā 100 nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis. Iegūta pretruna.

11.1. a) jā, var; skat. 10.zīm.
b) nē, nevar. Pieņemam, ka tas izdevies. Apzīmējam skaitļus izrakstīšanas secībā ar a_1; a_2; ...; a_7; varam pieņemt, ka $a_1<a_2$. Tad jābūt $a_2>a_3$, $a_3<a_4$, $a_4>a_5$, $a_5<a_6$, $a_6>a_7$, $a_7<a_1$, $a_1>a_2$ – pretruna. (Izšķirošais bija tas, ka 7 – nepāra skaitlis.)
c) nē, nevar. Apskatām piecas desmitstūra virsotnes, kas veido regulāru piecstūri, un spriežam par tām kā b) gadījumā.
d) jā, var. Skat. 11. zīm.



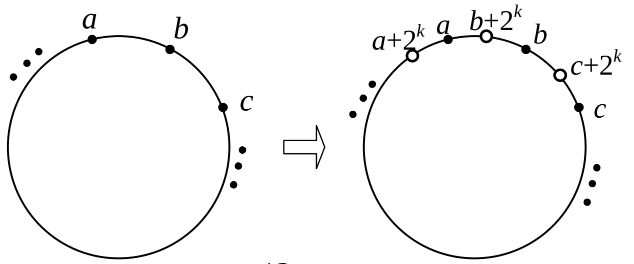
10. zīm.



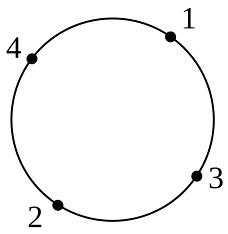
11. zīm.

Komentārs. Uzdevuma prasības ir izpildāmas tad un tikai tad, ja n ir divnieka pakāpe ar naturālu kāpinātāju. Ja n dalās ar kādu nepāra pirmskaitli p, apskatām regulāru p-stūri ar virsotnēm n-stūra virsotnēs un spriežam kā b) gadījumā. Induktīvā pāreja no $n=2^k$ uz $n=2^{k+1}$

shematiski attēlota 12.zīm.; ar tās palīdzību no 13. zīm. iegūts 10. zīm. un no 10. zīm. – 11. zīm.



12. zīm.



13. zīm.

11.2. Ja (x;y) ir atrisinājums, tad arī (-x;y) ir atrisinājums. Tāpēc sākumā apskatām tikai gadījumu $x \geq 0$. Vienādojumu var pārveidot par $x^2y+10=14y$ un tālāk par $y = \frac{10}{14-x^2}$. Tā kā y jābūt veselam un $y \neq 0$, tad jābūt $|14-x^2| \leq 10$, no kurienes $4 \leq x^2 \leq 24$; tā kā apskatām $x \geq 0$, tad $2 \leq x \leq 4$. Pārbaudot visas iespējas, iegūstam atrisinājumus (2;1), (-2;1), (3;2), (-3;2), (4;-5); (-4;-5).

11.3. Šķirojam divus gadījumus.

A. $x \geq 2$. Tad nevienādība kļūst par $||x-2-x|-9| \leq 2009$ jeb $7 \leq 2009$. Tātad visas šīs x vērtības der.

B. $x<2$. Tad nevienādība kļūst par $||2-2x|-9| \leq 2009$ un tālāk par $9-2009 \leq |2x-2| \leq 9+2009$, no kurienes $|2x-2| \leq 2018$ un $|x-1| \leq 1009$. Tāpēc $1-1009 \leq x \leq 1+1009$ jeb $-1008 \leq x \leq 1010$; der visi x, kur $-1008 \leq x < 2$. Apvienojot visas atbildes, iegūstam $x \geq -1008$.

11.4. Apzīmēsim ΔABC malas garumu ar a. No teorēmas par sekanšu nogriežņu reizinājumiem iegūstam

$AM \cdot a = AN(a-LC)$ un

$CL \cdot (a-AN) = CK \cdot a$.

Saskaitot abas vienādības un veicot elementārus algebriskus pārveidojumus, iegūstam vajadzīgo.

11.5. Ņemam vienu no punktiem P un šķirojam divas iespējas.

A. No P iziet 3 balti un 3 sarkani nogriežņi. Ja kaut divus šo 3 balto nogriežņu galapunktus arī savieno balts nogrieznis, esam ieguvuši baltu trijstūri. Ja tos visus savieno sarkani nogriežņi, iegūstam sarkanu trijstūri.

Līdzīgi otru vienkrāsainu trijstūri iegūstam, apskatot triju sarkano nogriežņu galus.

B. No P iziet vismaz 4 vienas krāsas nogriežņi (varam pieņemt, ka balti). Apskatām to galus M, N, K, L. Ja starp nogriežņiem, kas savieno M, N, K un L, ir kaut divi balti, iegūstam 2 baltus trijstūrus. Ja vismaz 5 no tiem ir sarkani – varam pieņemt, ka visi, izņemot varbūt MN – iegūstam sarkanus trijstūrus KLM un KLN.

Komentārs 1. To, ka iegūtās konfigurācijas tiešām ir trijstūri, nevis „divkārši nogriežņi", un to, ka nogriežņi nekrustojas (kas radītu neskaidrības par to, kā nokrāsots krustpunkts), garantē uzdevumā dotais par punktu izvietojumu telpā. Starp citu, pirmaias nosacījums seko no otrā un uzdevuma tekstā pieminēts tikai, lai „neatšķaidītu" risinājumā kombinatoriskos spriedumus.

Komentārs 2. Vairāk papūloties, var pierādīt, ka ir vismaz 4 vienkrāsaini trijstūri.

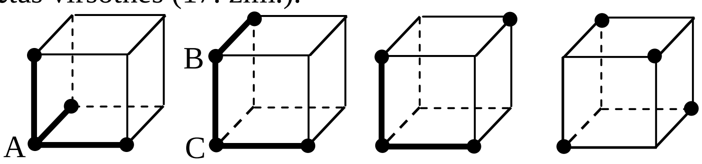
12.1. Tā kā $|\cos t| \le 1$, tad $\cos(x^2) + \cos(y^2) - \cos(xy) \le 1 + 1 - (-1) = 3$. Lai pierādītu stingro nevienādību, jāpierāda, ka nevar vienlaicīgi būt $\cos x^2 = 1$, $\cos y^2 = 1$, $\cos(xy) = -1$. Pieņemsim pretējo. Tad $x^2 = 2\pi n$, $y^2 = 2\pi k$, $xy = \pi(2l + 1)$, $n, k, l \in \mathrm{Z}$. No tā seko, ka $x^2 y^2 = 4\pi^2 nk$ un $(xy)^2 = \pi^2 \cdot (2l + 1)^2$. No tā seko, ka $4nk = (2l + 1)^2$ Bet pāra skaitlis nevar būt vienāds ar nepāra skaitli – pretruna.

12.2. Ja p=2, n=9; ja p=3, n=49; ja p=5, n=513. Pieņemsim, ka p>5. Tad $\mathrm{n} = (\mathrm{p}-2)(\mathrm{p}-1)(\mathrm{p}+1)(\mathrm{p}+2) + 9$ un p-2; p-1; p; p+1; p+2 ir 5 pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi, tāpēc viens no tiem dalās ar 5. Tā kā p>5, tad tas nav p; tāpēc $(p^2-1)(p^2-4)$ dalās ar 5. Skaitlis p^2-1 ir pāra, tāpēc $(p^2-1)(p^2-4)$ dalās ar 10. Tāpēc $(p^2-1)(p^2-4)+9$ pēdējais cipars ir 9. Tā kā pie p>5 iznāk n>10, tad ir vēl citi cipari bez pēdējā, tāpēc ciparu summa ir lielāka par 9. Tātad mazākā iespējamā n ciparu summa ir 9, un tā tiek sasniegta pie p=2 un p=5.

12.3. Ar ekvivalentiem pārveidojumiem iegūstam $\frac{1}{x}\left(x - \sqrt{2x+1}\right)^2 + \frac{1}{y}\left(y - \sqrt{2y+1}\right)^2 = 0$. Tā kā x>0, y>0, tad $x - \sqrt{2x+1} = 0$ un $y - \sqrt{2y+1} = 0$, no kurienes viegli seko $x = y = 1 + \sqrt{2}$.

12.4. Apzīmējam ΔABC malas garumu ar a. No teorēmas par hordu nogriežņu reizinājumiem iegūstam
AM(a+CK)=AN·a un
CL·a=CK·(AM+a).
Saskaitot šīs vienādības un veicot ekvivalentus pārveidojumus, iegūstam vajadzīgo.

12.5. Atbilde: 29.
Risinājums. Četras paralēlskaldņa virsotnes, kas neatrodas vienā plaknē, var izvēlēties četros būtiski dažādos veidos atkarībā no tā, kā tās savienotas vai nav savienotas ar šķautnēm.:
a) viena virsotne un trīs ar to savienotās (14. zīm.),
b) četras virsotnes „ķēdītē” (15. zīm.),
c) trīs virsotnes „ķēdītē” un viena virsotne pretējā skaldnē (16. zīm.),
d) četras izolētas virsotnes (17. zīm.).



14. zīm. 15. zīm. 16. zīm. 17. zīm.

a) Atkarībā no tā, kurš no 4 dotajiem punktiem ir A, iegūstam 4 paralēlskaldņus.
b) Atkarībā no tā, kuri divi no dotajiem punktiem ir B un C un kurš no abiem atlikušajiem savienots ar šķautni ar B, bet kurš – ar C, iegūstam $C_4^2 \cdot 2 = 12$ paralēlskaldņus.
c) Atkarībā no tā, kuri 3 no dotajiem punktiem ir vienā skaldnē un kurš no tiem ir „vidējais ķēdītē”, iegūstam $C_4^3 \cdot 3 = 12$ paralēlskaldņus.
d) Patvaļīgā veidā sadalot punktus pāros, šie pāri nosaka divas šķērsas taisnes. Caur tām jāvelk savstarpēji paralēlas skaldņu plaknes; to var izdarīt vienā vienīgā veidā. Tāpēc tāds paralēlskaldnis ir tikai viens. Atliek ievērot, ka 4+12+12+1=29.

Īsi norādījumi vērtēšanai.

9.1. Par piemēru ar laukumu 78 – 3 punkti.

No jebkura risinājuma, ja netiek pārbaudīts, vai visi uzdevuma nosacījumi izpildīti, jānoņem 1 punkts.

9.2. Par pareizu atbildi bez pamatojuma, ka tā ir vienīgā – 5 punkti.

9.3. Par pierādījumu tikai vienā virzienā – līdz 7 punktiem.

9.4. Par konkrētiem piemēriem – līdz 2 punktiem.

9.5. a) daļa – 5 punkti; b) daļā par gadījumu n=4 – 2 punkti.

10.1. Par pareizu atbildi vienu pašu – 2 punkti.

Ja nav atsauces uz to, ka 11; 13; 6 ir pa pāriem savstarpēji pirmskaitļi, jānoņem 1 punkts.

Ja nav vismaz pieminēts, ka izdarīta pārbaude, vai sasummētie skaitļi iznāk naturāli, jānoņem 2 punkti.

10.2. **Nav jāprasa**, lai būtu aptverti arī gadījumi, kuros taisne novietota citādi nekā dotajā zīmējumā.

10.3. Par a) daļu – 6 punkti.

10.4. Par pārveidojumiem, kas neved pie mērķa – ne vairāk par 3 punktiem.

10.5. Par novērojumu un pamatojumu, ka ar 100 pieskārieniem pietiek – 5 punkti.

11.1. a) 2 punkti; b) 2 punkti; c) 3 punkti; d) 3 punkti.

11.2. Par visu atrisinājumu uzrādīšanu pat bez mēģinājuma pamatot, ka tie tiešām ir visi – 4 punkti.

11.4. Par mēģinājumiem, kas neved pie mērķa – līdz 2 punktiem.

Ja ir kaut tikai mēģināts lietot atbilstošo teorēmu – vismaz 3 punkti.

11.5. Ja pierādīta viena trijstūra eksistence – 5 punkti.

Par „šauriem speciālgadījumiem” – līdz 2 punktiem.

12.1. Par nestingro nevienādību – 4 punkti.

12.2. Par pareizu atbildi vien – 2 punkti.

12.3. Par pārveidojumiem, kas neved pie mērķa – līdz 2 punktiem.

12.4. Par mēģinājumiem, kas neved pie mērķa – līdz 2 punktiem.

Ja ir kaut tikai mēģināts lietot atbilstošo teorēmu – vismaz 3 punkti.

12.5. Par pareizu atbildi – 7 punkti arī tad, ja nav sakarīga pamatojuma, bet no darba redzams, ka atbilde iegūta, kaut ko domājot, nevis norakstot.

Labu veiksmi Jums un Jūsu skolēniem!
A.Liepas NMS