LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 59. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

---

1. Trijstūrī ABC ar h_a, h_b un h_c apzīmēti to augstumu garumi, kas vilkti attiecīgi no virsotnēm A, B, C. Dots, ka $h_a \geq 5$, $h_b \geq 12$, $h_c \geq 13$.
Kāds ir mazākais iespējamais ΔABC laukums?

2. Kuri četrciparu naturāli skaitļi vienādi ar savu divu pēdējo ciparu veidotā naturālā skaitļa kvadrātu?

3. Divas riņķa līnijas krustojas. To rādiusu garumi ir R un r, bet attālums starp to centriem ir d. Vienā no abu riņķa līniju krustpunktiem tām abām novilktas pieskares. Pierādīt: šīs pieskares ir perpendikulāras viena otrai tad un tikai tad, ja $R^2 + r^2 = d^2$.

4. Kvadrātvienādojumam $x^2 + px + q = 0$ ir divas dažādas saknes, kas abas pieder intervālam [-1;1]. Pierādīt, ka katram reālam skaitlim x pastāv nevienādība $x^2 + px + q \geq -1$

5. Pieņemsim, ka $n \geq 3$, n – naturāls skaitlis. Aplūkosim patvaļīgu n cilvēku grupu.
a) pierādīt, ka šajā grupā var atrast divus tādus cilvēkus A un B, kam starp pārējiem ir vienādi paziņu daudzumi,
b) rūķītis Muriburis apgalvo: katriem diviem šīs grupas cilvēkiem A un B, kam šajā grupā paziņu daudzumi ir vienādi, var atrast vai nu tādu cilvēku C, kas pazīst gan A, gan B, vai arī tādu cilvēku D, kas nepazīst ne A, ne B. Vai Muriburis runā patiesību, ja n=4? Bet ja n=2009?

Piezīme: uzskatām, ka neviens nepazīst pats sevi un, ja X pazīst Y, tad arī Y pazīst X.

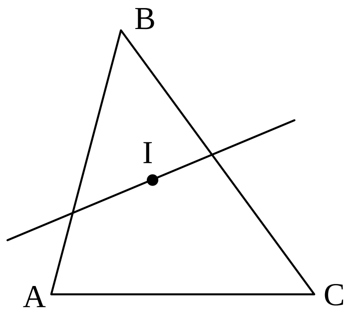
LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 59. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Atrodiet mazāko naturālo skaitli, kuru var izsacīt gan kā 11, gan kā 12, gan kā 13 pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summu.

2. Caur trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas centru I novilkta taisne t tā, kā parādīts 1. zīm. Tā dala trijstūra laukumu uz pusēm. Pierādīt, ka tā dala uz pusēm arī trijstūra perimetru.



1. zīm.

3. Dots, ka a un b ir naturāli skaitļi, a^2 dalās ar b un b^2 dalās ar a. Pierādīt, ka $(a+b)^3$ dalās ar $a \cdot b$. Vai noteikti $(a+b)^2$ dalās ar $a \cdot b$?

4. Atrisināt vienādojumu $\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4}+3\sqrt{z-9}=\frac{1}{2}(x+y+z)$ reālos skaitļos.

5. Kvadrātiska režģa formā izvietotas 100 spuldzes. Katra spuldze var būt vai nu ieslēgta, vai izslēgta. Pieskaroties jebkurai spuldzei (apzīmēsim to ar A), tā maina savu stāvokli (no ieslēgta uz izslēgtu vai otrādi). Vienlaicīgi savu stāvokli maina arī visas tās spuldzes, kuras ar A ir vai nu vienā rindā, vai vienā kolonnā.
Sākumā visas spuldzes ir izslēgtas. Ar kādu mazāko pieskārienu skaitu var panākt, lai tās vienlaicīgi visas būtu ieslēgtas?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 59. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

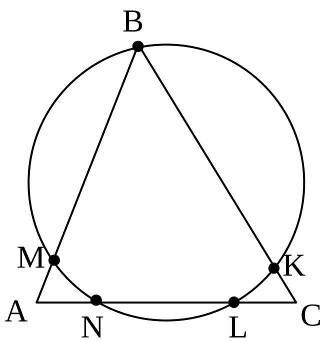
1. Regulāra n-stūra virsotnēs ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz n (katrā virsotnē cits skaitlis) ar īpašību: ja A, B, C – trīs n-stūra virsotnes un AB=AC, tad virsotnē A ierakstītais skaitlis vai nu lielāks par **abiem** skaitļiem, kas ierakstīti virsotnēs B un C, vai arī mazāks par tiem abiem.

Vai var būt, ka a) $n=8$, b) $n=7$, c) $n=10$, d) $n=16$?

2. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $\frac{x^2}{2}+\frac{5}{y}=7$.

3. Atrisināt nevienādību $\left|\left|\left|2-x\right|-x\right|-9\right| \le 2009$.

4. Riņķa līnija iet caur regulāra trijstūra ABC virsotni B un krusto tā malas, kā parādīts 2. zīm. Pierādīt, ka AM + CL = AN + CK.



2. zīm.

5. Telpā doti 7 punkti; nekādi 3 no tiem neatrodas uz vienas taisnes un nekādi 4 neatrodas vienā plaknē. Katri divi punkti savienoti ar baltu vai sarkanu nogriezni. Pierādīt: ir vismaz divi trijstūri, katram no kuriem visas 3 malas ir nokrāsotas vienādi (varbūt vienam trijstūrim tās visas ir baltas, bet otram – sarkanas).

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 59. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

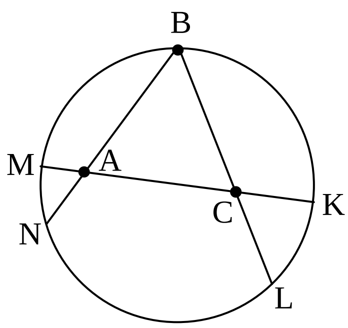
1. Pierādīt, ka visiem reāliem skaitļiem x un y pastāv nevienādība

$$\cos(x^2)+\cos(y^2)-\cos(xy)<3.$$

2. Dots, ka *p* ir pirmskaitlis un $n=(p^2-1)(p^2-4)+9$. Kāda ir mazākā iespējamā *n* ciparu summa? Kuriem *p* tā tiek sasniegta?

3. Atrisināt vienādojumu $x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+4=2\cdot\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2y+1}\right)$ pozitīvos reālos skaitļos.

4. Regulāra trijstūra ABC virsotne B atrodas uz riņķa līnijas; tā malu pagarinājumi krusto riņķa līniju, kā parādīts 3. zīm. Pierādīt, ka AM + CL = AN + CK.



3. zīm.

5. Telpā doti 4 punkti, kas visi neatrodas vienā plaknē. Cik ir paralēlskaldņu, kam visi šie punkti ir virsotnes?