Īsi atrisinājumi.

9.1. a) piemēram, $x^2-2x-1=0$.

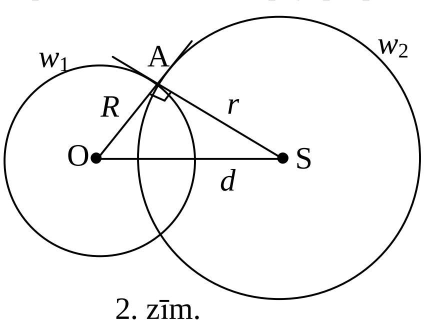
b) ievērojam, ka $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2}=\sqrt{3}+2$. Tāpēc der, piemēram, vienādojums $x^2-4x+1=0$.

9.2. Atceramies, ka

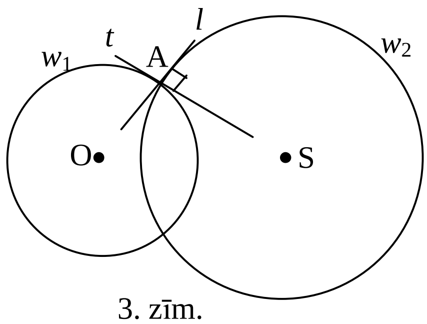
a) pieskare ir perpendikulāra rādiusam, kura galapunktā tā novilkta,

b) tātad taisne, kas novilkta perpendikulāri rādiusam tā galapunktā, ir pieskare.

1. Pieņemsim, ka $R^2+r^2=d^2$. Novelkam rādiusus uz r.l. krustpunktu A. Tad $OA^2+SA^2=OS^2$, tātad pēc Pitagora teorēmai apgrieztās teorēmas ΔOAS ir taisnleņķa. Tāpēc taisne SA (pēc augšminētā b) punkta) ir r.l. w_1 pieskare, un tāpat taisne OA ir w_2 pieskare. Tātad abas pieskares punktā A ir savstarpēji perpendikulāras.



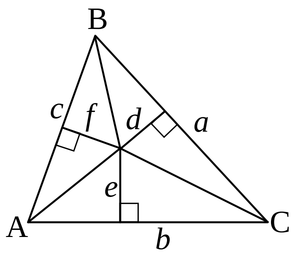
2. zīm.



3. zīm.

2. Pieņemam, ka pieskares krustpunktā A ir savstarpēji perpendikulāras (3. zīm.). Tā kā $t\perp l$, tad t satur w_2 rādiusu, tātad iet caur S. Līdzīgi l iet caur O. Tāpēc ΔOAS ir taisnleņķa, un no Pitagora teorēmas seko vajadzīgais.

9.3. Varam pieņemt, ka garākais augstums h ir pret malu c. Tātad c ir īsākā vai viena no īsākajām malām.



4. zīm.

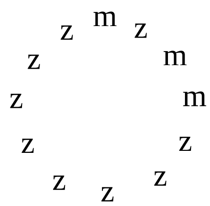
Tad (skat. 4.zīm.), izsakot ABC laukumu divos veidos, iegūstam $\frac{1}{2}hc=\frac{1}{2}cf+\frac{1}{2}ad+\frac{1}{2}be$,

no kurienes seko $h=f+\frac{a}{c}\cdot d+\frac{b}{c}\cdot e$.

Tā kā $\frac{a}{c}\geq 1$ un $\frac{b}{c}\geq 1$, iegūstam $h\geq f+d+e$, k.b.j.

9.4. Apzīmēsim meiteņu un zēnu daudzumus attiecīgi ar m un z. Tad $z=3m$, un pavisam ir $4m$ bērnu.

Ja ir a pāru „zēns-meitene”, tad citu pāru ir $2a$, tāpēc ir pavisam $3a$ pāru. Tāpēc $3a=4m$. Tātad m jādalās ar 3, un ir vismaz 12 bērnu. Piemēru ar 12 bērniem skat. 5.zīm.



5.zīm.

9.5. Varam pieņemt, ka $x \geq y$. Tad $x^2 < x^2 + y < x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. Tāpēc $x^2 + y$ atrodas starp diviem blakus esošu naturālu skaitļu kvadrātiem. Tātad tas nav naturāla skaitļa kvadrāts. Tāpēc sistēmai atrisinājuma naturālos skaitļos nav.

10.1. a) $x^2 + y^2 = x^2 + (n-x)^2 = 2x^2 - 2nx + n^2 = 2\left(x - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{2} \geq \frac{n^2}{2}$, jo kvadrāts nav negatīvs.

b) apzīmējam $x = \frac{n}{3} + a$, $y = \frac{n}{3} + b$, $z = \frac{n}{3} + c$; tad $a + b + c = (x + y + z) - 3 \cdot \frac{n}{3} = 0$. Tāpēc

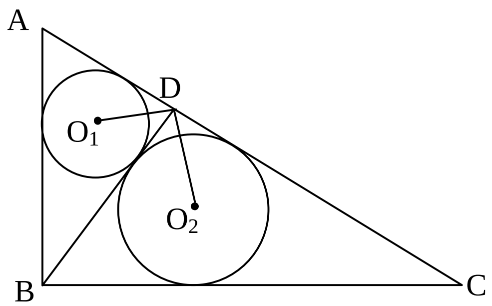
$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{n}{3} + a\right)^2 + \left(\frac{n}{3} + b\right)^2 + \left(\frac{n}{3} + c\right)^2 = \frac{n^2}{3} + \frac{2}{3}n(a+b+c) + (a^2 + b^2 + c^2) =$$

$$= \frac{n^2}{3} + (a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{n^2}{3}$$, k.b.j.

10.2. Ievērojam, ka $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^2 \cdot a - 3ab(a-b) - b^2 \cdot b$. Tā kā a^2 dalās ar *b*, tad $a^2 \cdot a$ dalās ar *ab*; tā kā b^2 dalās ar *a*, tad $b^2 \cdot b$ dalās ar *ab*. Tātad arī visa izteiksme dalās ar *ab*.

Ja $a = 4$ un $b = 2$, tad $(a-b)^2$ nedalās ar *ab*.

10.3. Tā kā $\angle O_1DB = \angle O_2DB = 45°$, tad $\angle O_1DO_2 = 90°$. Atceramies, ka ΔADB un ΔBDC ir līdzīgi (piemēram, pēc diviem leņķiem). Līdzīgos trijstūros visi atbilstošie elementi ir proporcionāli; tāpēc $O_1D : AB = O_2D : BC$ (atbilstošie elementi – attālumi no iecentra līdz taisnā leņķa virsotnei un hipotenūzai). Tāpēc $\Delta O_1DO_2 \sim \Delta ABC$ (leņķu vienādība un sānu malu proporcionalitāte).



6. zīm.

10.4. Pie $y \geq 4$ labā puse dalās ar 2, bet nedalās ar 8. Kreisajai pusei 2 jāsatur kā reizinātāju 3., 6., 9., ... pakāpē, tāpēc atrisinājuma nav. Atliek pārbaudīt $y = 1; 2; 3$. Iegūstam atrisinājumu $x = 2;\ y = 3$.

10.5. Atbilde: pēc 4 dienām.

Apskatām 7.zīmējumu. Uzvarētājs noteikti būs A, zaudētājs – F, jo viņu pārsvars/atpalicība pirms pēdējās kārtas ir 2 uzvaras.

	A	B	C	D	E	F
A		1		1	1	1
B	0		1	0	1	
C		0		1	0	1
D	0	1	0			1
E	0	0	1			1
F	0		0	0	0	

7.zīm.

Pierādīsim, ka ar 3 dienām nepietiek. Pieņemot pretējo, pirms divām pēdējām kārtām uzvarētāja pārsvaram jābūt vismaz 3 uzvaras, zaudētāja atpalicībai – tāpat. Bet starpība starp uzvarētāju un zaudētāju pēc 3.dienas var būt augstākais 3, un $3 < 3 + 3$.

11.1. Ievērojam, ka $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 x_2) = p^2 - 2q$ ir vesels skaitlis. Tālāk, $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2$ arī ir vesels skaitlis. Līdzīgi seko, ka $x_1^8 + x_2^8$ ir vesels skaitlis.

c) gadījumā vispirms pierādīsim, ka

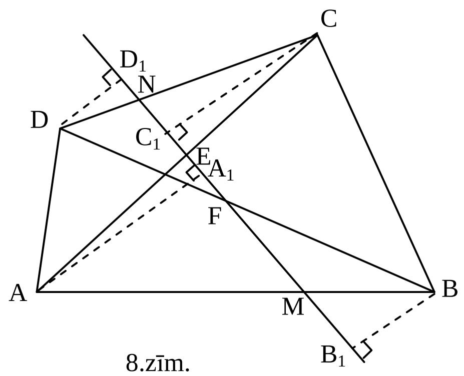
$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2\right) = (-p)(p^2 - 3q)$ ir vesels skaitlis.

Tālāk $(x_1^5 + x_2^5) = (x_1^4 + x_2^4)(x_1 + x_2) - (x_1 x_2)(x_1^3 + x_2^3)$, un atkal lietojam Vjeta teorēmu līdz ar iepriekšējiem rezultātiem.

11.2. Ja $(x; y)$ ir atrisinājums, tad arī $(-x; y)$ ir atrisinājums. Tāpēc sākumā apskatām tikai gadījumu $x \geq 0$. Vienādojumu var pārveidot par $x^2 y + 10 = 14y$ un tālāk par $y = \frac{10}{14 - x^2}$. Tā kā y jābūt veselam un $y \neq 0$, tad jābūt $\left|14 - x^2\right| \leq 10$, no kurienes $4 \leq x^2 \leq 24$; tā kā apskatām $x \geq 0$, tad $2 \leq x \leq 4$. Pārbaudot visas iespējas, iegūstam atrisinājumus (2;1), (-2;1), (3;2), (-3;2), (4;-5); (-4;-5).

11.3. Pārveidojam nevienādību par $(a-b)+(b-c)+(c-d)+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-d} \geq 6$ un lietojam nevienādību $x + \frac{1}{x} \geq 2$ pie $x = a - b$; $b - c$; $c - d$. Vienādība pastāv tad un tikai tad, kad $a - b = b - c = c - d = 1$.

11.4. Apzīmējam ar A_1, B_1, C_1, D_1 punktu A, B, C, D projekcijas uz taisnes EF. Tā kā $\Delta BFB_1 = \Delta DFD_1$ (*hl*), tad $BB_1 = DD_1$. Līdzīgi $CC_1 = AA_1$.



8.zīm.

Tāpēc $L(ABN) = L(AMN) + L(BMN) = \frac{1}{2} MN(AA_1 + BB_1)$.

Līdzīgi $L(CDM) = \frac{1}{2} MN(CC_1 + DD_1)$. No tā arī seko vajadzīgais.

11.5. Atbilde: pēc 6 dienām.

Risinājums. Apskatām 9.zīm. Uzvarētājs noteikti būs A, zaudētājs – H, jo viņu pārsvars/atpalicība pirms pēdējās kārtas ir 2 uzvaras.

	A	B	C	D	E	F	G	H
A			1	1	1	1	1	1
B			0	1	0	1	1	1
C	0	1		0	0	1		1
D	0	0	1		1		0	1
E	0	1	1	0		0	0	
F	0	0	0		1		1	1
G	0	0		1	1	0		1
H	0	0	0	0		0	0	

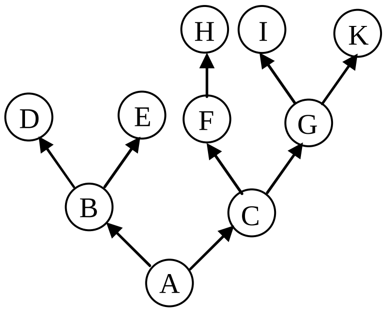
9.zīm.

Pierādīsim, ka ar 5 dienām nepietiek. Pieņemot pretējo, pēc 5.dienas uzvarētāja pārsvaram pār citiem jābūt vismaz 3 uzvaras, zaudētāja atpalicībai – tāpat. Bet starpība starp uzvarētāju un zaudētāju pēc 5.dienas var būt augstākais 5, un $5 < 3 + 3$.

12.1. Viens no skaitļiem $n-2$; $n-1$; n; $n+1$; $n+2$ dalās ar 5. Tā kā tas nav n, tad $(n^2-1)(n^2-4)$ dalās ar 5. Tā kā viens no reizinātājiem ir pāra, tad $(n^2-1)(n^2-4)$ dalās ar 10. Tāpēc apskatāmā skaitļa pēdējais cipars ir 7. Pie $n=1$ un $n=2$ meklējamā ciparu summa ir 7; pie $n \geq 3$ skaitlim ir vismaz divi cipari. Tāpēc tā ciparu summa ir lielāka par 7. Tātad mazākā iespējamā ciparu summa ir 7, kas tiek sasniegta pie $n=1$ un $n=2$.

12.2. Acīmredzot jābūt $A = 1$. Skaitļus starp „kreiso” un „labo” zaru var sadalīt $C_9^3 = 84$ veidos. Kreisā zara iekšpusē iespējami 2 sadalījumi (B – mazākais skaitlis). C jābūt mazākajam labajā zarā; tālākais sadalījums iespējams $C_5^2 = 10$ veidos. Attiecībā uz F un H tālākas izvēles nav. Daļā ar G, I, K iespējami divi izvietojumi (G – mazākais skaitlis).

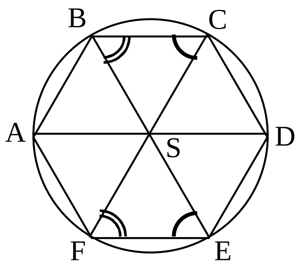
Pavisam iznāk $84 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 2 = 3360$.



10.zīm.

12.3. Apzīmējam $1-x^2=a$, $1-y^2=b$; tad $\sqrt{a}+\sqrt{b}=a+b$. Tā kā $0\le a\le 1$ un $0\le b\le 1$, tad $\sqrt{a}\ge a$ un $\sqrt{b}\ge b$, turklāt vienādības pastāv tad un tikai tad, ja a un b ir 0 vai 1. Tāpēc iegūstam 9 atrisinājumus $(1;1)$, $(1;-1)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$, $(1;0)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(0;-1)$, $(0;0)$.

12.4. No riņķī ievilktu leņķu īpašībām seko, ka $\Delta BSC \sim \Delta FSE$. Tāpēc $\frac{BC}{EF}=\frac{SB}{SF}$.



11.zīm.

Līdzīgi pierāda $\frac{AF}{CD}=\frac{SF}{SD}$ un $\frac{ED}{AB}=\frac{SD}{SB}$. Sareizinot šīs vienādības, iznāk $\frac{BC}{EF}\cdot\frac{AF}{CD}\cdot\frac{ED}{AB}=1$, no kurienes $BC\cdot AF\cdot ED = EF\cdot CD\cdot AB$.

12.5. Atbilde: a) var, b) nevar.

Risinājums. **a)** sanumurējam virsotnes pēc kārtas ar skaitļiem no 1 līdz 20 un savācam vispirms monētas no 1., 2., 3., 4., 5. virsotnes piektajā virsotnē, bet monētas no 6., 7., 8., 9., 10. virsotnes – 6.virsotnē. Pēc tam līdzīgi rīkojamies pārējām 10 monētām.

b) atkal sanumurējam virsotnes tāpat kā a) daļā un starp 1. un 20. virsotni atzīmējam zaļu punktu Z. Ar S sapratīsim monētu aizņemto virsotņu numuru summu (katras virsotnes numuru ieskaitām tik reižu, cik tajā ir monētu). Sākumā $S=1+2+...+20=10\cdot 21$. Paskatāmies, kā S mainās. Ja kārtējā gājienā Z šķērso divas monētas vai nešķērso neviena, S nemainās. Ja kārtējā gājienā Z šķērso viena monēta, S mainās par 20 jeb par $2\cdot 10$. Tāpēc S vienmēr ir $10\cdot n$, kur n – nepāra skaitlis. Bet, ja visas monētas savāktu pa 4 monētām kaudzē, S dalītos ar 4. Tātad tas nav iespējams.

Īsi norādījumi vērtēšanai

9.1. Par katru daļu – 5 punkti.
9.2. Par katru daļu – 5 punkti.

9.4. Par piemēru bez minimālitātes pierādījuma – 5 punkti.

10.1. Par katru daļu – 5 punkti.

10.2. Par katru daļu – 5 punkti.

10.4. Par uzminētu atrisinājumu – 2 punkti.

10.5. Par katru daļu – 5 punkti.

11.1. Par a) daļu **–** 2 punkti; par b) daļu **–** 3 punkti; par c) daļu **–** 5 punkti.

11.2. Par atrisinājumiem bez pierādījuma, ka tie ir vienīgie - līdz 5 punktiem.

11.3. Par skaitliskiem piemēriem – līdz 1 punktam.

11.5. Par katru daļu – 5 punkti.

12.1. Par dažu gadījumu aplūkošanu – līdz 2 punktiem.

12.2. Nepareizas atbildes gadījumā ne vairāk par 5 punktiem.

12.3. Par pārveidojumiem bez rezultāta ne vairāk par 2 punktiem.

12.4. Par speciālgadījumu apskatīšanu – līdz 3 punktiem.

12.5. Par katru daļu – 5 punkti.

Vispārēji ieteikumi olimpiāžu darbu vērtēšanai, ja nav doti citi norādījumi

– (svītriņa) – uzdevums nav risināts; tīrrakstā nav minēts pat uzdevuma numurs.
0 punkti – tīrrakstā minēts uzdevuma numurs, bet risinājumā nav nevienas vērtīgas idejas, kas varētu vest pie pareiza atrisinājuma.
1-2 punkti – dažas derīgas idejas, bet bez tālākas izmantošanas vai pamatojuma.
3-4 punkti – veiksmīgi iesākts risinājums, bet nav saskatīts virziens, kā turpināt iesākto un novest līdz galam.
5 punkti – puse risinājuma.
6 punkti – pareizi iesākts un turpināts risinājums, kas tomēr nav paspēts vai prasts novest līdz pašam galam.
7 punkti – principā pareizs risinājums, bet ir kāda lielāka iebilde, nepilnība, trūkums.
8-9 punkti – uzdevums atrisināts, bet risinājumam nelieli defekti – trūkst kāda paskaidrojuma, izlaistas mazāk būtiskas, bet tomēr nepieciešamas detaļas utml.
10 punkti – absolūti pareizs un skaidri saprotami pierakstīts risinājums bez iebildēm, piebildēm un citiem trūkumiem.

Labu veiksmi Jums un Jūsu skolēniem!
A.Liepas NMS