

## Īsi atrisinājumi.

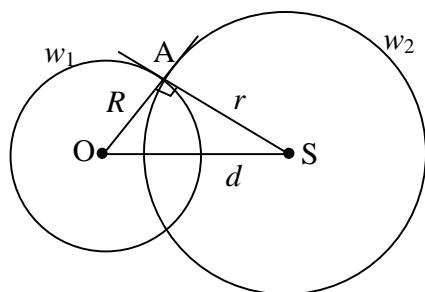
9.1. a) piemēram,  $x^2 - 2x - 1 = 0$ .

b) ievērojam, ka  $\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+2)^2} = \sqrt{3}+2$ . Tāpēc der, piemēram, vienādojums  $x^2 - 4x + 1 = 0$ .

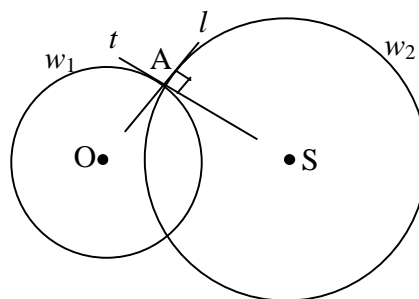
9.2. Atceramies, ka

- a) pieskare ir perpendikulāra rādiusam, kura galapunktā tā novilkta,
- b) tātad taisne, kas novilkta perpendikulāri rādiusam tā galapunktā, ir pieskare.

1. Pieņemsim, ka  $R^2 + r^2 = d^2$ . Novelkam rādiusus uz r.l. krustpunktu A. Tad  $OA^2 + SA^2 = OS^2$ , tātad pēc Pitagora teorēmai apgrieztās teorēmas  $\triangle OAS$  ir taisnleņķa. Tāpēc taisne SA (pēc augšminētā b) punkta) ir r.l.  $w_1$  pieskare, un tāpat taisne OA ir  $w_2$  pieskare. Tātad abas pieskares punktā A ir savstarpēji perpendikulāras.



2. zīm.

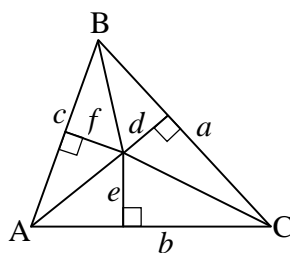


3. zīm.

2. Pieņemam, ka pieskares krustpunktā A ir savstarpēji perpendikulāras (3. zīm.).

Tā kā  $t \perp l$ , tad  $t$  satur  $w_2$  rādiusu, tātad iet caur S. Līdzīgi  $l$  iet caur O. Tāpēc  $\triangle OAS$  ir taisnleņķa, un no Pitagora teorēmas seko vajadzīgais.

9.3. Varam pieņemt, ka garākais augstums  $h$  ir pret malu  $c$ . Tātad  $c$  ir īsākā vai viena no īsākajām malām.



4. zīm.

Tad (skat. 4.zīm.), izsakot ABC laukumu divos veidos, iegūstam  $\frac{1}{2}hc = \frac{1}{2}cf + \frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}be$ ,

no kurienes seko  $h = f + \frac{a}{c} \cdot d + \frac{b}{c} \cdot e$ .

Tā kā  $\frac{a}{c} \geq 1$  un  $\frac{b}{c} \geq 1$ , iegūstam  $h \geq f + d + e$ , k.b.j.

9.4. Apzīmēsim meiteņu un zēnu daudzumus attiecīgi ar  $m$  un  $z$ . Tad  $z = 3m$ , un pavisam ir  $4m$  bērnu.

Ja ir  $a$  pāru „zēns-meitene”, tad citu pāru ir  $2a$ , tāpēc ir pavisam  $3a$  pāru. Tāpēc  $3a = 4m$ . Tātad  $m$  jādalās ar 3, un ir vismaz 12 bērnu. Piemēru ar 12 bērniem skat. 5.zīm.

$$\begin{array}{cccc}
 & & z & m & z \\
 & & z & & m \\
 & z & & & m \\
 & z & & & z \\
 & z & z & z & 
 \end{array}$$

5.zīm.

**9.5.** Varam pieņemt, ka  $x \geq y$ . Tad  $x^2 < x^2 + y < x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ . Tāpēc  $x^2 + y$  atrodas starp diviem blakus esošu naturālu skaitļu kvadrātiem. Tātad tas nav naturāla skaitļa kvadrāts. Tāpēc sistēmai atrisinājuma naturālos skaitļos nav.

**10.1. a)**  $x^2 + y^2 = x^2 + (n-x)^2 = 2x^2 - 2nx + n^2 = 2\left(x - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{2} \geq \frac{n^2}{2}$ , jo kvadrāts nav negatīvs.

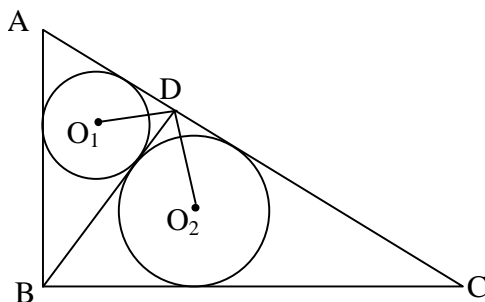
**b)** apzīmējam  $x = \frac{n}{3} + a$ ,  $y = \frac{n}{3} + b$ ,  $z = \frac{n}{3} + c$ ; tad  $a + b + c = (x + y + z) - 3 \cdot \frac{n}{3} = 0$ . Tāpēc

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 + z^2 &= \left(\frac{n}{3} + a\right)^2 + \left(\frac{n}{3} + b\right)^2 + \left(\frac{n}{3} + c\right)^2 = \frac{n^2}{3} + \frac{2}{3}n(a+b+c) + (a^2 + b^2 + c^2) = \\
 &= \frac{n^2}{3} + (a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{n^2}{3}, \text{ k.b.j.}
 \end{aligned}$$

**10.2.** Ievērojam, ka  $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^2 \cdot a - 3ab(a-b) - b^2 \cdot b$ . Tā kā  $a^2$  dalās ar  $b$ , tad  $a^2 \cdot a$  dalās ar  $ab$ ; tā kā  $b^2$  dalās ar  $a$ , tad  $b^2 \cdot b$  dalās ar  $ab$ . Tātad arī visa izteiksme dalās ar  $ab$ .

Ja  $a = 4$  un  $b = 2$ , tad  $(a-b)^2$  nedalās ar  $ab$ .

**10.3.** Tā kā  $\angle O_1DB = \angle O_2DB = 45^\circ$ , tad  $\angle O_1DO_2 = 90^\circ$ . Atceramies, ka  $\triangle ADB$  un  $\triangle BDC$  ir līdzīgi (piemēram, pēc diviem leņķiem). Līdzīgos trijstūros visi atbilstošie elementi ir proporcionāli; tāpēc  $O_1D : AB = O_2D : BC$  (atbilstošie elementi – attālumi no iecentra līdz taisnā leņķa virsotnei un hipotenūzai). Tāpēc  $\triangle O_1DO_2 \sim \triangle ABC$  (leņķu vienādība un sānu malu proporcionalitāte).



6. zīm.

**10.4.** Pie  $y \geq 4$  labā puse dalās ar 2, bet nedalās ar 8. Kreisajai pusei 2 jāsatur kā reizinātāju 3., 6., 9., ... pakāpē, tāpēc atrisinājuma nav. Atliek pārbaudīt  $y = 1; 2; 3$ . Iegūstam atrisinājumu  $x = 2; y = 3$ .

**10.5.** Atbilde: pēc 4 dienām.

Apskatām 7.zīmējumu. Uzvarētājs noteikti būs A, zaudētājs – F, jo viņu pārsvars/atpalcība pirms pēdējās kārtas ir 2 uzvaras.

	A	B	C	D	E	F
A		1		1	1	1
B	0		1	0	1	
C		0		1	0	1
D	0	1	0			1
E	0	0	1			1
F	0		0	0	0	

7.zīm.

Pierādīsim, ka ar 3 dienām nepietiek. Pieņemot pretējo, pirms divām pēdējām kārtām uzvarētāja pārsvaram jābūt vismaz 3 uzvaras, zaudētāja atpalcībai – tāpat. Bet starpība starp uzvarētāju un zaudētāju pēc 3.dienas var būt augstākais 3, un  $3 < 3 + 3$ .

**11.1.** Ievērojam, ka  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1x_2) = p^2 - 2q$  ir vesels skaitlis. Tālāk,  $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2$  arī ir vesels skaitlis. Līdzīgi seko, ka  $x_1^8 + x_2^8$  ir vesels skaitlis.

c) gadījumā vispirms pierādīsim, ka

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = (-p)(p^2 - 3q)$  ir vesels skaitlis.

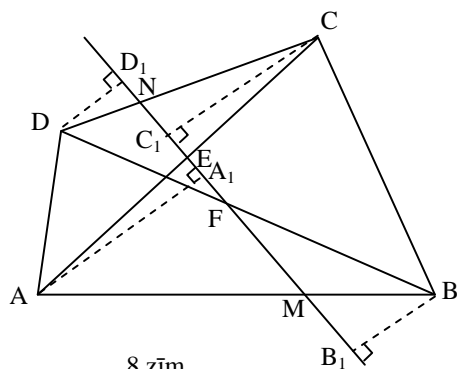
Tālāk  $(x_1^5 + x_2^5) = (x_1^4 + x_2^4)(x_1 + x_2) - (x_1x_2)(x_1^3 + x_2^3)$ , un atkal lietojam Vjeta teorēmu līdz ar iepriekšējiem rezultātiem.

**11.2.** Ja  $(x; y)$  ir atrisinājums, tad arī  $(-x; y)$  ir atrisinājums. Tāpēc sākumā apskatām tikai gadījumu  $x \geq 0$ . Vienādojumu var pārveidot par  $x^2y + 10 = 14y$  un tālāk par  $y = \frac{10}{14 - x^2}$ . Tā kā  $y$  jābūt veselam un  $y \neq 0$ , tad jābūt  $|14 - x^2| \leq 10$ , no kurienes  $4 \leq x^2 \leq 24$ ; tā kā apskatām  $x \geq 0$ , tad  $2 \leq x \leq 4$ . Pārbaudot visas iespējas, iegūstam atrisinājumus  $(2;1)$ ,  $(-2;1)$ ,  $(3;2)$ ,  $(-3;2)$ ,  $(4;-5)$ ;  $(-4;-5)$ .

**11.3.** Pārveidojam nevienādību par  $(a-b) + (b-c) + (c-d) + \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-d} \geq 6$  un lietojam

nevienādību  $x + \frac{1}{x} \geq 2$  pie  $x = a-b$ ;  $b-c$ ;  $c-d$ . Vienādība pastāv tad un tikai tad, kad  $a-b = b-c = c-d = 1$ .

**11.4.** Apzīmējam ar  $A_1, B_1, C_1, D_1$  punktu A, B, C, D projekcijas uz taisnes EF. Tā kā  $\Delta BFB_1 = \Delta DFD_1$  (hl), tad  $BB_1 = DD_1$ . Līdzīgi  $CC_1 = AA_1$ .



8.zīm.

Tāpēc  $L(ABN) = L(AMN) + L(BMN) = \frac{1}{2}MN(AA_1 + BB_1)$ .

Līdzīgi  $L(CDM) = \frac{1}{2}MN(CC_1 + DD_1)$ . No tā arī seko vajadzīgais.

**11.5. Atbilde:** pēc 6 dienām.

Risinājums. Apskatām 9.zīm. Uzvarētājs noteikti būs A, zaudētājs – H, jo viņu pārsvars/atpalcība pirms pēdējās kārtas ir 2 uzvaras.

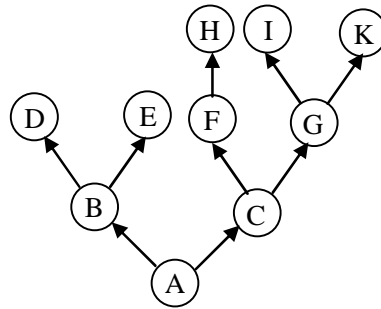
	A	B	C	D	E	F	G	H
A			1	1	1	1	1	1
B			0	1	0	1	1	1
C	0	1		0	0	1		1
D	0	0	1		1		0	1
E	0	1	1	0		0	0	
F	0	0	0		1		1	1
G	0	0		1	1	0		1
H	0	0	0	0		0	0	

9.zīm.

Pierādīsim, ka ar 5 dienām nepietiek. Pieņemot pretējo, pēc 5.dienas uzvarētāja pārsvaram pār citiem jābūt vismaz 3 uzvaras, zaudētāja atpalcībai – tāpat. Bet starpība starp uzvarētāju un zaudētāju pēc 5.dienas var būt augstākais 5, un  $5 < 3 + 3$ .

**12.1.** Viens no skaitļiem  $n-2$ ;  $n-1$ ;  $n$ ;  $n+1$ ;  $n+2$  dalās ar 5. Tā kā tas nav  $n$ , tad  $(n^2-1)(n^2-4)$  dalās ar 5. Tā kā viens no reizinātājiem ir pāra, tad  $(n^2-1)(n^2-4)$  dalās ar 10. Tāpēc apskatāmā skaitļa pēdējais cipars ir 7. Pie  $n=1$  un  $n=2$  meklējamā ciparu summa ir 7; pie  $n \geq 3$  skaitlim ir vismaz divi cipari. Tāpēc tā ciparu summa ir lielāka par 7. Tātad mazākā iespējamā ciparu summa ir 7, kas tiek sasniegta pie  $n=1$  un  $n=2$ .

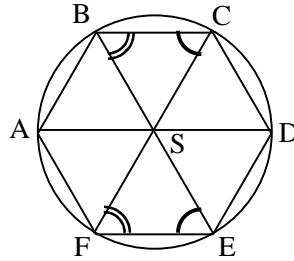
**12.2.** Acīmredzot jābūt  $A = 1$ . Skaitļus starp „kreiso” un „labo” zaru var sadalīt  $C_9^3 = 84$  veidos. Kreisā zara iekšpusē iespējami 2 sadalījumi (B – mazākais skaitlis). C jābūt mazākajam labajā zarā; tālākais sadalījums iespējams  $C_5^2 = 10$  veidos. Attiecībā uz F un H tālākas izvēles nav. Daļā ar G, I, K iespējami divi izvietojumi (G – mazākais skaitlis). Pavisam iznāk  $84 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 2 = 3360$ .



10.zīm.

**12.3.** Apzīmējam  $1-x^2=a$ ,  $1-y^2=b$ ; tad  $\sqrt{a}+\sqrt{b}=a+b$ . Tā kā  $0\leq a\leq 1$  un  $0\leq b\leq 1$ , tad  $\sqrt{a}\geq a$  un  $\sqrt{b}\geq b$ , turklāt vienādības pastāv tad un tikai tad, ja  $a$  un  $b$  ir 0 vai 1. Tāpēc iegūstam 9 atrisinājumus  $(1;1)$ ,  $(1;-1)$ ,  $(-1;1)$ ,  $(-1;-1)$ ,  $(1;0)$ ,  $(-1;0)$ ,  $(0;1)$ ,  $(0;-1)$ ,  $(0;0)$ .

**12.4.** No riņķī ievilktu leņķu īpašībām seko, ka  $\triangle BSC \sim \triangle FSE$ . Tāpēc  $\frac{BC}{EF} = \frac{SB}{SF}$ .



11.zīm.

Līdzīgi pierāda  $\frac{AF}{CD} = \frac{SF}{SD}$  un  $\frac{ED}{AB} = \frac{SD}{SB}$ . Sareizinot šīs vienādības, iznāk

$$\frac{BC}{EF} \cdot \frac{AF}{CD} \cdot \frac{ED}{AB} = 1, \text{ no kurienes } BC \cdot AF \cdot ED = EF \cdot CD \cdot AB.$$

**12.5.** Atbilde: a) var, b) nevar.

Risinājums. **a)** sanumurējam virsotnes pēc kārtas ar skaitļiem no 1 līdz 20 un savācam vispirms monētas no 1., 2., 3., 4., 5. virsotnes piektajā virsotnē, bet monētas no 6., 7., 8., 9., 10. virsotnes – 6.virsotnē. Pēc tam līdzīgi rīkojamies pārējām 10 monētām.

**b)** atkal sanumurējam virsotnes tāpat kā a) daļā un starp 1. un 20. virsotni atzīmējam zaļu punktu Z. Ar S sapratīsim monētu aizņemto virsotņu numuru summu (katras virsotnes numuru ieskaitām tik reizi, cik tajā ir monētu). Sākumā  $S = 1 + 2 + \dots + 20 = 10 \cdot 21$ . Paskatāmies, kā S mainās. Ja kārtējā gājienā Z šķērso divas monētas vai nešķērso neviena, S nemainās. Ja kārtējā gājienā Z šķērso vienu monētu, S mainās par 20 jeb par  $2 \cdot 10$ . Tāpēc S vienmēr ir  $10 \cdot n$ , kur n – nepāra skaitlis. Bet, ja visas monētas savāktu pa 4 monētām kaudzē, S dalītos ar 4. Tātad tas nav iespējams.

## Īsi norādījumi vērtēšanai

9.1. Par katru daļu – 5 punkti.

9.2. Par katru daļu – 5 punkti.

9.4. Par piemēru bez minimālītātes pierādījuma – 5 punkti.

---

10.1. Par katru daļu – 5 punkti.

10.2. Par katru daļu – 5 punkti.

10.4. Par uzminētu atrisinājumu – 2 punkti.

10.5. Par katru daļu – 5 punkti.

---

11.1. Par a) daļu – 2 punkti; par b) daļu – 3 punkti; par c) daļu – 5 punkti.

11.2. Par atrisinājumiem bez pierādījuma, ka tie ir vienīgie - līdz 5 punktiem.

11.3. Par skaitliskiem piemēriem – līdz 1 punktam.

11.5. Par katru daļu – 5 punkti.

---

12.1. Par dažu gadījumu aplūkošanu – līdz 2 punktiem.

12.2. Nepareizas atbildes gadījumā ne vairāk par 5 punktiem.

12.3. Par pārveidojumiem bez rezultāta ne vairāk par 2 punktiem.

12.4. Par speciālgadījumu apskatīšanu – līdz 3 punktiem.

12.5. Par katru daļu – 5 punkti.

---

### *Vispārēji ieteikumi olimpiāžu darbu vērtēšanai, ja nav doti citi norādījumi*

– (svītriņa) – uzdevums nav risināts; tīrrakstā nav minēts pat uzdevuma numurs.

**0 punkti** – tīrrakstā minēts uzdevuma numurs, bet risinājumā nav nevienas vērtīgas idejas, kas varētu vest pie pareiza atrisinājuma.

**1-2 punkti** – dažas derīgas idejas, bet bez tālākas izmantošanas vai pamatojuma.

**3-4 punkti** – veiksmīgi iesākts risinājums, bet nav saskatīts virziens, kā turpināt iesākto un novest līdz galam.

**5 punkti** – puse risinājuma.

**6 punkti** – pareizi iesākts un turpināts risinājums, kas tomēr nav paspēts vai prasts novest līdz pašam galam.

**7 punkti** – principā pareizs risinājums, bet ir kāda lielāka iebilde, nepilnība, trūkums.

**8-9 punkti** – uzdevums atrisināts, bet risinājumam nelieli defekti – trūkst kāda paskaidrojuma, izlaistas mazāk būtiskas, bet tomēr nepieciešamas detaļas utml.

**10 punkti** – absolūti pareizs un skaidri saprotami pierakstīts risinājums bez iebildēm, piebildēm un citiem trūkumiem.

*Labu veiksmi Jums un Jūsu skolēniem!*

*A.Liepas NMS*