LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 60. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Atrodiet kaut vienu kvadrātvienādojumu ar veseliem koeficientiem, kam viena no saknēm ir

a) $\sqrt{2}+1$,

b) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

Piezīme. Katrā uzdevuma daļā runā par **citu** kvadrātvienādojumu.

2. Divas riņķa līnijas krustojas. To rādiusu garumi ir R un r, bet attālums starp to centriem ir d. Vienā no abu riņķa līniju krustpunktiem tām abām novilktas pieskares. Pierādīt: šīs pieskares ir perpendikulāras viena otrai tad un tikai tad, ja $R^2+r^2=d^2$.

3. Šaurleņķu trijstūra ABC iekšpusē dots punkts P. Pierādīt: P attālumu summa līdz ABC malām nav garāka par ABC lielāko augstumu.

4. Ap apaļu galdu sēž zēni un meitenes, zēnu ir trīs reizes vairāk nekā meiteņu. Tādu vietu, kur blakus sēž zēns un meitene, ir divreiz mazāk nekā pārējo vietu (t.i., tādu, kur blakus sēž vai nu zēns un zēns, vai meitene un meitene). Kāds ir mazākais iespējamais bērnu skaits?

5. Atrisiniet naturālos skaitļos vienādojumu sistēmu $\begin{cases} x^2+y=z^2 \\ y^2+x=t^2 \end{cases}$.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 60. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. a) dots, ka $x+y=n$. Pierādīt, ka $x^2+y^2 \geq \frac{n^2}{2}$.

b) dots, ka $x+y+z=n$. Pierādīt, ka $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{n^2}{3}$.

2. Dots, ka a un b ir naturāli skaitļi, a^2 dalās ar b un b^2 dalās ar a. Pierādīt, ka $(a-b)^3$ dalās ar $a \cdot b$. Vai noteikti $(a-b)^2$ dalās ar $a \cdot b$?

3. Taisnleņķa trijstūrī ABC augstums no taisnā leņķa B virsotnes ir BD. Trijstūros ABD un BCD ievilkto riņķu centri ir O_1 un O_2. Pierādīt, ka ΔABC un ΔO_1DO_2 ir līdzīgi savā starpā.

4. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu $x^3 = y!+2$.

5. Turnīrā piedalās 6 komandas. Katrai ar katru citu jāspēlē tieši vienu reizi; neizšķirtu nav. Katru dienu komandas sadalās trīs pāros, un katra pāra komandas spēlē savā starpā. (Tātad katru dienu katra komanda spēlē vienu spēli.) Kāds ir mazākais dienu skaits, pēc kura var rasties situācija: jau ir skaidrs, kurai (vienīgajai) komandai pēc turnīra noslēguma būs vairāk uzvaru nekā jebkurai citai, un ir arī skaidrs, kurai (vienīgajai) komandai pēc turnīra noslēguma būs mazāk uzvaru nekā jebkurai citai?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 60. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Dots, ka p un q ir naturāli skaitļi un kvadrātvienādojuma $x^2+px+q=0$ saknes ir x_1 un x_2. Pierādīt, ka

a) $x_1^2+x_2^2$,

b) $x_1^8+x_2^8$,

c) $x_1^5+x_2^5$

ir vesels skaitlis.

2. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $\frac{x^2}{2}+\frac{5}{y}=7$.

3. Dots, ka $a>b>c>d$. Pierādīt, ka $a-d+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-d}\geq 6$.

Kad pastāv vienādība?

4. Dots, ka ABCD ir izliekts četrstūris, kas nav paralelograms. Taisne, kas novilkta caur diagonāļu viduspunktiem, krusto malas AB un CD attiecīgi iekšējos punktos M un N. Pierādīt, ka trijstūru ABN un CDM laukumi ir vienādi savā starpā.

5. Turnīrā piedalās 8 komandas. Katrai ar katru citu jāspēlē tieši vienu reizi; neizšķirtu nav. Katru dienu komandas sadalās četros pāros, un katra pāra komandas spēlē savā starpā. (Tātad katru dienu katra komanda spēlē vienu spēli.) Kāds ir mazākais dienu skaits, pēc kura var rasties situācija: jau ir skaidrs, kurai (vienīgajai) komandai pēc turnīra noslēguma būs vairāk uzvaru nekā jebkurai citai, un ir arī skaidrs, kurai (vienīgajai) komandai pēc turnīra noslēguma būs mazāk uzvaru nekā jebkurai citai?

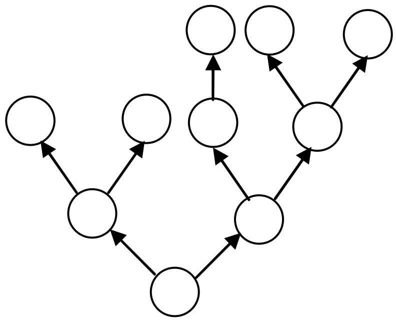
LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 60. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Dots, ka n – naturāls skaitlis, kas nedalās ar 5. Kāda ir mazākā iespējamā ciparu summa skaitlim $(n^2-1)(n^2-4)+7$? Pie kādām n vērtībām tā tiek sasniegta?

2. Aplīšos 1.zīm jāizvieto pa vienam naturālam skaitlim no 1 līdz 10 (tiem visiem jābūt dažādiem) tā, lai katra bultiņa ietu no mazāka skaitļa uz lielāku skaitli. Cik dažādu izvietojumu var izveidot?



1.zīm.

3. Atrisināt vienādojumu $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=2-x^2-y^2$.

4. Riņķī ievilkta sešstūra ABCDEF diagonāles AD, BE un CF krustojas vienā punktā. Pierādīt: sešstūra malas var sadalīt 2 grupās pa 3 malām katrā tā, ka abās grupās iekļauto malu garumu reizinājumi ir vienādi savā starpā.

5. Regulārā 20-stūrī katrā virsotnē ir pa vienai monētai. Ar vienu gājienu var izvēlēties 2 monētas un tās pārbīdīt: vienu uz blakus virsotni pulksteņa rādītāja kustības virzienā, otru uz blakus virsotni pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var savākt visas monētas

a) 4 kaudzēs pa 5 monētām katrā,
b) 5 kaudzēs pa 4 monētām katrā?