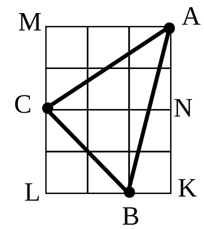
Īsi atrisinājumi.

5.1. Jā, piemēram 7, 17, un 95 vieninieki.



1. zīm.

5.2. $S(ACM)=\frac{1}{2}S(ANCM)=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2=3$ rūtiņas, līdzīgi $S(AKB)=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1=2$ rūtiņas un $S(CBL)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$ rūtiņas.

Tātad $S(ABC)=S(AKLM)-S(ACM)-S(AKB)-S(CBL)=$
$=3\cdot 4-3-2-2=5$ rūtiņas (skat. 1. zīm.).

5.3. Ievērosim trīs nosacījumus, kuriem jābūt spēkā visu ceļojuma laiku: autobusā nevienā brīdī nedrīkst būt vairāk par 40 pasažieriem, nevienā pieturā no autobusa nevar izkāpt vairāk pasažieru, nekā ir autobusā un katru pilsētu var apmeklēt ne vairāk kā vienreiz.

Pirmā pilsēta ir A un, izbraucot no tās, autobusā ir 34 pasažieri, bet pēdējā ir G, iebraucot tajā autobusā bija 28 pasažieri.

Otrā pilsēta var būt C, tad pēc maršruta AC nobraukšanas autobusā ir 35 pasažieri (apzīmēsim to AC (35)) vai arī otrā pilsēta var būt E, tātad AE (22).

Analizēsim iespējamos šo maršrutu turpinājumus:

1) ACE (23) → ACEB (30) vai ACED (34), taču neviens no šiem maršrutiem nav tālāk turpināms.

2) **ACF (22) → ACFD (33) → ACFDB (40) → ACFDBE (28) → ACFDBEG (0)**

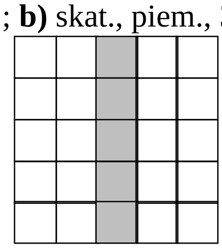
3) ACF (22) → ACFD (33) → ACFDE (21) – maršruts nav turpināms.

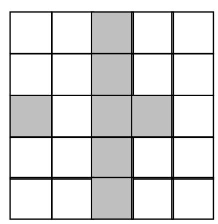
4) AED (33) → AEDB (40) →AEDBF (27) – maršruts nav turpināms.

5) AED (33) → AEDC (34) – maršruts nav turpināms.

Tātad vienīgais maršruts, kas apmierina visus noteikumus, ir **ACFDBEG**.

5.4. a) skat., piem., 2. zīm.; **b)** skat., piem., 3. zīm.


2. zīm.


3. zīm.

5.5. Atbilde: pēc 3 minūtēm.

Ar trim minūtēm pietiek, ja sarunas raganu starpā notiek, piemēram, šādi:

1. minūte: AB, CD, EF, GH.
2. minūte: AC, BD, EG, FH.
3. minūte: AE, BF, CG, DH.

Tā kā katru jauno burvestību pēc 2 minūtēm var zināt augstākais 4 raganas, tad ar 2 minūtēm nepietiek.

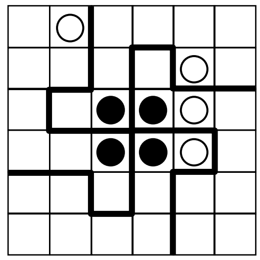
6.1. Ja tāds sadalījums būtu iespējams, tad katrā grupā un līdz ar to arī visu skaitļu summa būtu pāra skaitlis (katrā grupā ietilpstošo skaitļu summa ir $2M_i$, kur M_i ir attiecīgās grupas lielākais skaitlis). Taču visu doto skaitļu summa $1+2+3+\cdots+21=231$ ir nepāra skaitlis.

6.2. Pavisam šajā virknē ir 5·4·3·2·1=120 skaitļi. Interesējošais skaitlis ir pēdējais, kas sākas ar 4, un pēc šī skaitļa virknē vēl ir 24 skaitļi, kas sākas ar ciparu 5. Tātad šajā virknē skaitlis 45321 atrodas 96. vietā.

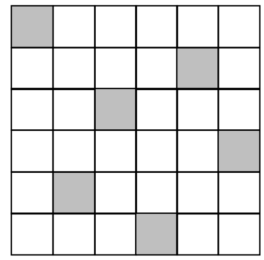
6.3. a) nē, jo gan 12, gan 8 dalās ar 4, bet 2 – nedalās.

b) jā; piemēram, $11 \cdot 4 - 7 \cdot 6 = 2$.

6.4. Skat., piem., 4. zīm.



4. zīm.



5. zīm.

6.5. Skat., piem., 5. zīm.

7.1. Tā kā katriem desmit pēc kārtas ņemtiem skaitļiem kvadrātu summa beidzas ar vienu un to pašu ciparu, un šai summai pievienojot 0^2, tajā būs desmit desmitnieku (0, 1, 2,... 9; 10, 11, ..., 19; ...; 90, 91, ..., 99), tātad meklētās summas pēdējais cipars ir nulle.

7.2. Ievērojam, ka $125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$. Vismaz vienam no reizinātājiem $n+1$; $n+2$; $n+3$ jādalās ar 5. Tā kā skaitļi, kas dalās ar 5, atšķiras viens no otra vismaz par 5, tad tieši viena iekava dalās ar 125. Šī iekava ir viens no skaitļiem $125 \cdot k$, kur $k = 1, 2, 3, ..., 16$, jo jau $125 \cdot 17 > 2011$. Tāpēc meklējamo skaitļu ir $16 \cdot 3 = 48$.

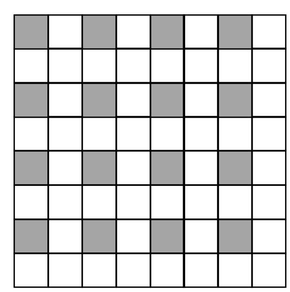
7.3. Atbilde: tieši viens no tiem.

Vispirms pierādīsim, ka kāds no skaitļiem ir 0. Ja neviens no tiem nav nulle, tad visu blakus skaitļu reizinājumi ir negatīvi, tātad jebkuri divi blakus skaitļi ir ar pretējām zīmēm. Ja mēs skaitļus apzīmējam ar *a*,*b*,*c*,*d*,*e*, tad *a* un *b* ir ar pretējām zīmēm, *b* un *c* ir ar pretējām zīmēm, tātad *a* un *c* ir ar vienādām zīmēm. Tieši tāpat pamato, ka *c* un *e* arī ir ar vienādām zīmēm. Bet tātad arī *a* un *e* ir ar vienādām zīmēm un reizinājums *ae* ir pozitīvs – pretruna.

Tātad, viens no skaitļiem ir 0, pieņemsim, ka *e*=0. Tad zīmes skaitļiem *a*,*b*,*c*,*d* var būt vai nu "+ - + -" vai "- + + - +". Redzams, ka no reizinājumiem *abc*, *bcd* viens ir pozitīvs ("- + -") un viens negatīvs ("+ - +"). Pārējie trīs triju blakusstāvošu skaitļu reizinājumi satur reizinātāju *e*, tātad to vērtība ir 0. Tātad tieši viens no šiem reizinājumiem ir pozitīvs.

7.4. a) Var, skat., piem., 6. zīm.

b) Nē, nevar. Kvadrātu 8×8 rūtiņas sadalām 16 kvadrātiņos ar izmēriem 2×2 rūtiņas. Vismaz vienā no tiem būs vismaz divas aizkrāsotās rūtiņas, bet tās ir blakusrūtiņas.



6. zīm.

7.5. Ar *g* apzīmēsim cik % no visiem iedzīvotājiem ir godīgie, ar g_A (resp. g_B, g_C, g_D) – tos godīgos iedzīvotājus (% no visiem iedzīvotājiem), kas balsoja par A (resp., B, C, D) partiju, $g_A + g_B + g_C + g_D = g$; līdzīgi ar b, b_A, b_B, b_C, b_D apzīmēsim blēžus (% no visiem iedzīvotājiem).

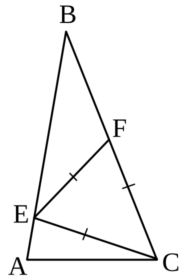
Par A pozitīvi atbildēja godīgie iedzīvotāji, kas balsoja par A un tie blēži, kas nebalsoja par A. Tātad $g_A + b - b_A = 22\%$. Līdzīgi: $g_B + b - b_B = 33\%$, $g_C + b - b_C = 44\%$ un $g_D + b - b_D = 55\%$.

Saskaitot šīs vienādības, iegūstam $g + 3b = 154\%$, tātad 2*b*=54% jeb *b*=27% un *g*=73%.

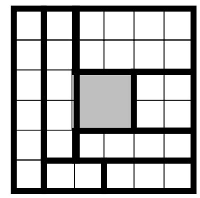
8.1. Uzrakstām $\overline{abcde} = (9999a + 999b + 99c + 9d) + (a + b + c + d + e)$. Atņemot saskaitāmie $(a + b + c + d + e)$ saīsinās.

8.2. Ievietojot x=1, iegūstam $1+p+q=0$ jeb $p+q=-1$.

8.3. $\angle$FCE=$\angle$CEF=$\angle$EFC=60°. Tad $\angle$BFE=180°-60°=120° (blakusleņķi) un $\angle$BEF=180°-30°-120°=30°, tātad ΔEBF – vienādsānu un BF=EF=FC (skat. 7. zīm.)



7. zīm.



8. zīm.

8.4. Figūru var sagriezt augstākais 7 dažādos taisnstūros, piem., skat. 8. zīm.

Ja to sagrieztu tādos taisnstūros, kuru laukums nepārsniedz 6 rūtiņas, tad to laukumu summa nepārsniegtu 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 = 31 < 32 (šie taisnstūri ir ar izmēriem 1×1, 1×2, 1×3, 1×4, 2×2, 1×5, 1×6 un 2×3 rūtiņas).

Tāpēc, figūru sagriežot kaut kādā skaitā taisnstūru, kāda iegūtā taisnstūra laukums būs vismaz 8. Pie tam, neviena taisnstūra laukums nebūs vienāds ar 7. Tāpēc, ja figūru sagrieztu vismaz 8 dažādos taisnstūros, tad to laukumu summa, ievērojot visu augstākminēto, būtu vismaz 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 8 = 33 > 32 – pretruna. Tāpēc 7 ir lielākais dažādo taisnstūru skaits, kuros figūru var sagriezt.

8.5. Tā kā par partiju D neviens iedzīvotājs nav atbildējis ar „jā", tad visi blēži ir balsojuši par šo partiju un $g_D=0$ (*apzīmējumi tādi paši kā 7.5. uzdevuma risinājumā*). Par partiju A ar „Jā" atbildēja visi godīgie iedzīvotāji, kas balsoja par A (apzīmēsim tos ar g_A) un visi blēži (apzīmēsim tos ar b), tātad $g_A+b=33\%$. Līdzīgi par partiju B balsoja $g_B+b=44\%$ iedzīvotāju, bet par partiju C – $g_C+b=55\%$.

Saskaitot visas vienādības, iegūstam $g_A+g_B+g_C+3b=g+3b=132\%$ jeb $2b=32\%$ un $b=16\%$. Tātad par partiju A ir balsojuši 17%, par B – 28%, par C – 39%, par D – 16% iedzīvotāju.

Īsi norādījumi vērtēšanai.

5.3. Par atbildi ar pārbaudi, bez pamatojuma, ka tas ir vienīgais variants – 5 punkti.

5.4. Par katru daļu 5 punkti.

5.5. Par katru daļu (piemērs un minimalitātes pamatojums) 5 punkti.

6.3. Par katru daļu 5 punkti.

7.2. Ja nav pamatojuma, kāpēc visi piecinieki ir vienas iekavas dalītāji, jānoņem 4 punkti.

7.3. Par atbildi bez pamatojuma, kāpēc tā ir vienīgā iespējamā – līdz 5 punktiem.

7.4. Par katru daļu 5 punkti.

8.4. Par piemēru bez pamatojuma, kāpēc nevar būt vairāk taisnstūri – 5 punkti.

Vispārēji ieteikumi olimpiāžu darbu vērtēšanai, ja nav doti citi norādījumi

– (svītriņa) – uzdevums nav risināts; tīrrakstā nav minēts pat uzdevuma numurs.
0 punkti – tīrrakstā minēts uzdevuma numurs, bet risinājumā nav nevienas vērtīgas idejas, kas varētu vest pie pareiza atrisinājuma.
1-2 punkti – dažas derīgas idejas, bet bez tālākas izmantošanas vai pamatojuma.
3-4 punkti – veiksmīgi iesākts risinājums, bet nav saskatīts virziens, kā turpināt iesākto un novest līdz galam.
5 punkti – puse risinājuma.
6 punkti – pareizi iesākts un turpināts risinājums, kas tomēr nav paspēts vai prasts novest līdz pašam galam.
7 punkti – principā pareizs risinājums, bet ir kāda lielāka iebilde, nepilnība, trūkums.
8-9 punkti – uzdevums atrisināts, bet risinājumam nelieli defekti – trūkst kāda paskaidrojuma, izlaistas mazāk būtiskas, bet tomēr nepieciešamas detaļas utml.
10 punkti – absolūti pareizs un skaidri saprotami pierakstīts risinājums bez iebildēm, piebildēm un citiem trūkumiem.

Labu veiksmi Jums un Jūsu skolēniem!

LU A.Liepas NMS