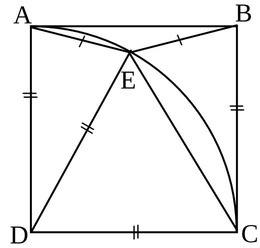
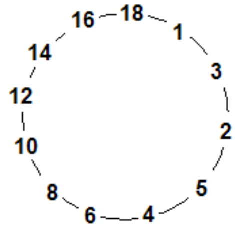
Īsi atrisinājumi.

9.1. Ja $x=1$, tad $y=a+1+b=2012$. Ja $x=-1$, tad $y=a-1+b=2010$. Tātad punkti (1; 2012) un (–1; 2010) pieder visu minēto funkciju grafikiem.



9.2. Atbilde: ∠ABE=15°.

Apzīmēsim ∠ABE=*x*, tad ∠ADE=2*x*. Tā kā ΔADE – vienādsānu, tad ∠DAE=(180°-2*x*):2=90°-*x*. Tātad ∠BAE=*x* un ΔAEB ir vienādsānu trijstūris, kur AE=BE. ∠BEC=90°-*x*=∠DAE, tātad ΔAED=ΔBEC (*mlm*), tātad arī DE=EC=DC un ΔDEC – vienādmalu. ∠EDC=60°, ∠ADE=30°=2*x* un *x*=15°. Tātad ∠ABE=15°.



9.3. Atbilde: *k*=12.

Apzīmēsim pāra skaitļus ar *p*, bet nepāra ar *n*. Tā kā *p* skaits ir trīs reizes lielāks par *n* skaitu, tad *k* jādalās ar 4. Tā kā blakus esošo skaitļu pāru skaits arī ir *k*, tad *k* jādalās ar 3, tātad *k* jādalās ar 12. Piemērs parāda, ka 12 skaitļus var izvietot atbilstoši uzdevuma nosacījumiem.

9.4. Ja dotā vienādība izpildās, tad $a>x$, $a>y$ un $a>z$. Naturāliem skaitļiem no šejienes seko nevienādības $a \ge x+1$, $a \ge y+1$ un $a \ge z+1$.

Tātad $7^a = 7\cdot 7^{a-1} = 4\cdot 7^{a-1}+7^{a-1}+7^{a-1}+7^{a-1} > 7^x+7^y+7^z$ un nav tādu naturālu skaitļu a, x, y, z, ka $7^a = 7^x+7^y+7^z$.

9.5. Atbilde: N≤7.

Ja Maija kādai sportistei būs zaudējusi visos četros braucienos, tad viņa būs zaudējusi šai sportistei arī kopvērtējumā. Tātad, lai Maija kopvērtējumā būtu pirmā, nedrīkst atrasties neviena tāda sportiste, kura būtu ātrāka par Maiju visos četros braucienos. Pie N=7 tas ir iespējams, skat., piem., tabulu.

	1.brauciens		**2.brauciens**		**3.brauciens**		**4.brauciens**		**Kopvērtējums**	
	Laiks	**Vieta**	**Laiks**	**Vieta**	**Laiks**	**Vieta**	**Laiks**	**Vieta**	**Laiks**	**Vieta**
A	40	1	40,01	1	40,02	1	41	8	**161,03**	**2**
B	41,01	8	40,05	2	40,06	2	40,03	1	**161,15**	**3**
C	40,04	2	41,02	8	40,1	3	40,07	2	**161,23**	**4**
D	40,08	3	40,09	3	41,03	8	40,11	3	**161,31**	**5**
E	40,12	4	40,13	4	40,14	4	41,04	9	**161,43**	**6**
F	41,05	9	40,17	5	40,18	5	40,15	4	**161,55**	**7**
G	40,16	5	41,06	9	40,22	6	40,19	5	**161,63**	**8**
H	40,2	6	40,21	6	41,07	9	40,23	6	**161,71**	**9**
M	40,24	7	40,25	7	40,26	7	40,27	7	**161,02**	**1**

Pierādīsim, ka N nevar būt lielāks par 7. Ja N būtu 8, tad katrā braucienā tikai viena sportiste būtu zaudējusi Maijai un kopumā būtu tikai četras sportistes no astoņām, kas kopvērtējumā varētu būt zaudējušas Maijai, tātad Maija kopvērtējumā nevarētu būt ieguvusi augstākais 5. vietu.

10.1. a) $(s+t)^2 = p^2 \Rightarrow s^2+2st+t^2 = p^2 \Rightarrow s^2+2st-t^2 = p^2-2t^2 \Rightarrow$
$2s^2-(s-t)^2 = p^2-2t^2$. Tā kā $(s-t)^2 \ge 0$, tad $2s^2 \ge p^2-2t^2$, k.b.j.

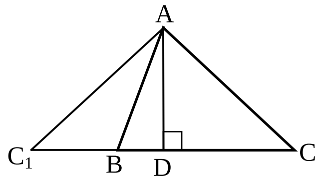
b) $(s+t+u)^2 = p^2 \Rightarrow s^2+t^2+u^2+2st+2su+2tu = p^2 \Rightarrow$

$s^2-2t^2-2u^2+2st+2su+2tu = p^2-3t^2-3u^2 \Rightarrow$

$3s^2-(s-t)^2-(s-u)^2-(t-u)^2 = p^2-3t^2-3u^2$.

Tā kā $(s-t)^2 \geq 0$, $(s-u)^2 \geq 0$ un $(t-u)^2 \geq 0$, tad $3s^2 \geq p^2-3t^2-3u^2$, k.b.j.

10.2. Ja AD atrodas trijstūra ABC iekšpusē, atliekam punktu C_1 simetriski punktam C attiecībā pret taisni AD. Tad DC_1=DC un AC_1=AC. No trijstūra nevienādības trijstūrī ABC_1 seko $\mathrm{DC}-\mathrm{DB}=\mathrm{DC_1}-\mathrm{DB}=\mathrm{C_1B}>\mathrm{AC_1}-\mathrm{AB}=\mathrm{AC}-\mathrm{AB}$.



Ja ΔABC ir platleņķa trijstūris un AD atrodas ārpus trijstūra ABC, pierādāmais apgalvojums tieši seko no trijstūra nevienādības trijstūrī ABC.

10.3. Atbilde: vienīgais šāds skaitlis ir $3\frac{8}{11}$.

Ja $x \geq 4$, tad vienādojuma kreisā puse nav mazāka par 64 un prasītā vienādība neizpildās.
Ja $x < 3$, tad vienādojuma kreisā puse nepārsniedz 27 un prasītā vienādība neizpildās.
Tātad $3 \leq x < 4$ un iegūstam vienādojumu $x \cdot [3x] = 41$. Tā kā $9 \leq 3x < 12$, tad šķirojam variantus:

a) $[3x]=9$; $9x=41$, $x=4\frac{5}{9}$ – neder, jo $[x] \neq 3$;

b) $[3x]=10$; $10x=41$, $x=4.1$ – neder, jo $[x] \neq 3$;

c) $[3x]=11$; $11x=41$, $x=3\frac{8}{11}$ – der (nepieciešama pārbaude).

10.4. ∠BAC=∠BCA=(180°-30°):2=75°, ∠FCE=∠CEF=∠EFC=60°. Tad ∠BFE=180°-60°=120° (blakusleņķi) un ∠BEF=180°-30°-120°=30°, tātad ΔEBF – vienādsānu un BF=EF=FC.

Apzīmēsim AB=BC=2*a*, tad FC=BF=*a*. Tad $S_{CEF}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ un $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a\cdot \sin 30° = a^2$. Tātad $\dfrac{S_{CEF}}{S_{ABC}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

10.5. Atbilde: augstākā – 1. vieta, zemākā – 16. vieta.

Jāņa komanda noteikti ir zaudējusi tām komandām, kurām tā ir zaudējusi katrā atsevišķā braucienā. Ja ir zaudēts ne visos braucienos, tad kopvērtējumā var būt uzvarējusi gan viena, gan otra komanda. Pirmo vietu Jāņa komanda var iegūt tad, ja neatrodas tāda komanda, kura būtu bijusi labāka par Jāņa komandu visos braucienos. Tas ir iespējams, ja komandas atsevišķos braucienos finišējušas, piemēram šādi (Jāņa komanda apzīmēta ar J):

Brauciens\Vieta	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.
1.	A	J	R	P	O	N	M	L	K	S	I	H	G	F	E	D	C	B
2.	A	B	J	R	P	O	N	M	L	K	S	I	H	G	F	E	D	C
3.	A	B	C	J	R	P	O	N	M	L	K	S	I	H	G	F	E	D
4.	B	C	D	E	F	G	H	I	S	J	K	L	M	N	O	P	R	A

Šeit jāņem vērā, ka vietu secība dažādos braucienos nenozīmē vienādu laika starpību. Piemēram, pirmajā braucienā pirmo divu vietu rezultātu starpība neko neļauj spriest par pirmo divu vietu rezultātu starpību citos braucienos.

Zemākā iespējamā Jāņa komandas vieta būs tad, ja augstāk par Jāņa komandu atradīsies visas komandas, kas ir uzvarējušas Jāņa komandu vismaz vienā braucienā. Tādas komandas pavisam ir 15 (viena pirmajā braucienā, divas – otrajā, trīs – trešajā un deviņas – ceturtajā). Tātad zemākā Jāņa komandas ieņemtā vieta kopvērtējumā var būt 16. (Jāparāda piemērs, kad tas var realizēties.)

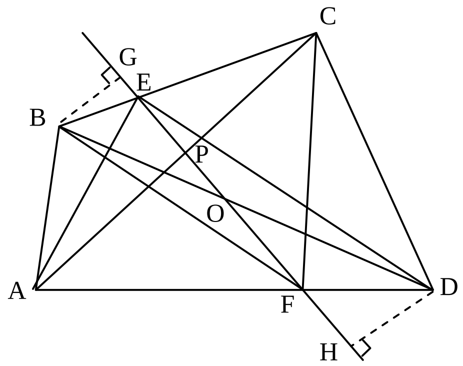
11.1. Pareizinot doto izteiksmi ar divi, iegūst

$$2x^2+2y^2+8 \geq 4x+4y+2xy$$

To savukārt var pārveidot par triju kvadrātu summu:

$$(x-y)^2+(x-2)^2+(y-2)^2 \geq 0.$$

11.2. Punkti P un O ir attiecīgi AC un BD viduspunkti (AP=PC un BO=OD). No B un D novelk perpendikulus pret EF: BG⊥EF un DH⊥EF. Aplūko taisnleņķa trijstūrus BGO un DHO. Šiem trijstūriem ir vienādas hipotenūzas OB=OD un šaurie leņķi $\angle BOG=\angle DOH$ (kā krustleņķi. Tātad $\Delta BGO=\Delta DHO$, tāpēc arī BG=DH. No tā seko, ka trijstūru EFD un BEF laukumi ir vienādi, jo tiem ir kopīga mala EF un pret šo malu vilktie augstumi ir vienādi. Līdzīgi, novelkot augstumus no A un C pret EF, var pierādīt, ka arī trijstūru AEF un CEF laukumi ir vienādi. Tad $S_{ADE}=S_{AEF}+S_{DEF}=S_{CEF}+S_{BEF}=S_{BCF}$, k.b.j.



11.3. Visiem vienādojumiem abām pusēm pieskaitot 1, iegūstam

$$\begin{cases}(x+1)(y+1)=18\\(y+1)(z+1)=72\\(z+1)(x+1)=12\end{cases}$$

Sareizinot šos trīs vienādojumus, iegūstam

$$\left((x+1)(y+1)(z+1)\right)^2=72^2\cdot 3 \text{ jeb}$$

$$(x+1)(y+1)(z+1)=72\sqrt{3} \text{ vai } (x+1)(y+1)(z+1)=-72\sqrt{3}.$$

Iegūtās sakarību izdalot ar sistēmas katru vienādojumu, iegūstam

$$\begin{cases}z+1=4\sqrt{3}\\x+1=\sqrt{3}\\y+1=6\sqrt{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\sqrt{3}-1\\y=6\sqrt{3}-1\\z=4\sqrt{3}-1\end{cases}$$

vai

$$\begin{cases}z+1=-4\sqrt{3}\\x+1=-\sqrt{3}\\y+1=-6\sqrt{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-\sqrt{3}-1\\y=-6\sqrt{3}-1\\z=-4\sqrt{3}-1\end{cases}$$

11.4. Meklējamo $a+b$ mazāko iespējamo vērtību apzīmēsim ar S. Ievērosim, ka $21=5^2-5+1$, tāpēc $5^3+1=(5+1)(5^2-5+1)$ dalās ar 21 un tāpēc $S \leq 5+3=8$. Tālāk izmantosim faktu: jebkuram naturālam n skaitlis n^2+1 nedalās ar 3. Tiešām, ja n dalās ar 3, tad n^2+1 nedalās ar 3, un ja n nedalās ar 3, tad $n^2-1=(n+1)(n-1)$ dalās ar 3 un n^2+1 nedalās ar 3. Tāpēc ja b būtu pāra skaitlis, tad a^b būtu pilns kvadrāts un a^b+1 nedalītos ar 3 un tāpēc arī ar $3\cdot 7=21$. Tāpēc b ir nepāra skaitlis, līdz ar to pietiek pārbaudīt šādas b vērtības: 1, 3, 5, 7. Ja $b=1$, tad $a \geq 20$ un $a+b>S$. Ja $b=7$, tad $a>1$ un $a+b>8$. Tāpēc ja summa

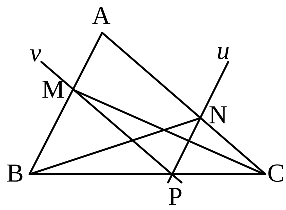
$a + b$ ir minimāla, tad b ir 3 vai 5. Tālāka pārbaude rāda, ka ja $a^3 + 1$ dalās ar 21, tad $a \geq 5$ un ja $a^5 + 1$ dalās ar 21, tad $a \geq 4$. Tāpēc $S \geq 8$, no kurienes seko, ka $S = 8$.

11.5. Tā kā katrs no skaitļiem ir divu citu skaitļu starpības modulis, tad visi uzrakstītie skaitļi ir nenegatīvi. Aplūkosim lielāko no tiem, apzīmēsim to ar L Savukārt ar A un B apzīmēsim skaitlim L pulksteņrādītāja virzienā sekojošos skaitļus secībā ...L, A, B...., pie tam 0≤A≤L un 0≤B≤L. Lai būtu spēkā vienādība L=|A-B|, vai nu A=L un B=0, vai arī A=0 un B=L. Turpinot spriedumus, iegūstam, ka visi aplī uzrakstītie skaitļi ir vai nu L, vai 0, pie tam tie sadalās k grupiņās pa trim (L,L,0).

Tātad visu skaitļu summa ir 10=2L·k, bet uzrakstīto skaitļu skaits n=3k. Lk=5, tātad k=1 vai k=5 un n=3 (L=5) vai n=15 (L=1).

12.1. Tā kā $0 \leq a^2 \leq 1$ un $0 \leq b^2 \leq 1$, tad $0 \leq \sqrt{1-a^2} \leq 1$ un $0 \leq \sqrt{1-b^2} \leq 1$. Tātad $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \sqrt{1-a^2} \leq \frac{1}{2}$ un $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \sqrt{1-b^2} \leq \frac{1}{2}$ jeb $\left|\frac{1}{2} - \sqrt{1-a^2}\right| \leq \frac{1}{2}$ un $\left|\frac{1}{2} - \sqrt{1-b^2}\right| \leq \frac{1}{2}$, tātad $\left(\frac{1}{2} - \sqrt{1-a^2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$ un $\left(\frac{1}{2} - \sqrt{1-b^2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$. Uzdevumā dotā vienādība izpildās tikai gadījumā, ja $\left(\frac{1}{2} - \sqrt{1-a^2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ un $\left(\frac{1}{2} - \sqrt{1-b^2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ jeb $\sqrt{1-a^2} = 0$ vai $\sqrt{1-a^2} = 1$ un $\sqrt{1-b^2} = 0$ vai $\sqrt{1-b^2} = 1$, tātad $a^2 = 0$ vai $a^2 = 1$un $b^2 = 0$ vai $b^2 = 1$. Tāpēc iegūstam 9 atrisinājumus $(1;1)$, $(1;-1)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$, $(1;0)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(0;-1)$, $(0;0)$.

12.2. Ievērojam, ka S(ABC)=S(MBP)+S(NPC)+S(AMPN), S(MBC)=S(MBP)+S(MPC), S(NBC)=S(NPC)+S(NBP). Lai pierādītu prasīto atliek pierādīt, ka S(MPC)+S(NBP)=S(AMPN).



Bet $\mathrm{S(MPC)} = \frac{1}{2}\mathrm{MP} \cdot h_1 = \frac{1}{2}\mathrm{S(AMPN)}$, jo augstums no C pret MP ir vienāds ar augstumu no A pret MP, jo AC||MP. Tāpat $\mathrm{S(NBP)} = \frac{1}{2}\mathrm{NP} \cdot h_2 = \frac{1}{2}\mathrm{S(AMPN)}$, jo augstums no B pret NP ir vienāds ar augstumu no A pret NP, jo AB||NP.

12.3. Viegli pārbaudīt, ka skaitļi 3, 5, 7 un 9 nav fantastiski: $3 \neq 9$, $5 \neq 10$, $7 \neq 36$ un $9 \neq 8$. Vairākciparu skaitļiem n interesēsimies par pēdējo un priekšpēdējo ciparu n^2 decimālajā pierakstā.

Ja n=10k+1, tad n^2=100k^2+10 2k+1 un n^2 pēdējais cipars ir 1, bet priekšpēdējais – pāra cipars.

Ja n=10k+3, tad n^2=100k^2+10 6k+9 un n^2 pēdējais cipars ir 9, bet priekšpēdējais – pāra cipars.

Ja n=10k+5, tad n^2=100k^2+100k+25 un n^2 pēdējais cipars ir 5, bet priekšpēdējais – 2 (pāra cipars).

Ja n=10k+7, tad n^2=100k^2+140k+49=100(k^2+k)+10(4k+4)+9 un n^2 pēdējais cipars ir 9, bet priekšpēdējais – pāra cipars.

Ja n=10k+9, tad n^2=100k^2+180k+81=100(k^2+k)+10(8k+8)+1 un n^2 pēdējais cipars ir 1, bet priekšpēdējais – pāra cipars.

Līdz ar to, ja n ir nepāra skaitlis, tad n^2 satur vismaz vienu pāra ciparu un visu ciparu reizinājums ir pāra skaitlis, tātad nav vienāds ar n.

12.4. Pierādīsim, ka N nevar būt lielāks par 1.

Ja N>1, tad visām rūtiņām ir vairāk nekā viena kaimiņu rūtiņa. Aplūkosim vienu rūtiņu, kurā ierakstīts vismazākais skaitlis (šādas rūtiņas var būt arī vairākas). Tajā ierakstītais skaitlis ir mazāks vai vienāds ar **visās** (vairāk nekā vienā) kaimiņu rūtiņās ierakstītajiem skaitļiem – pretruna.

Ja N=1, tabulas aizpildījums var būt šāds:

1	2	3	4	5	...	2008	2009	2010	2010

12.5. Katra šķautne ir mala tieši divām skaldnēm, tātad divkāršots daudzskaldņa šķautņu skaits ir vienāds ar visu skaldņu malu skaitu summu, tāpēc šī summa ir pāra skaitlis. Bet nepāra skaita nepāru skaitļu ir nepāra skaitlis, tad iegūstam pretrunu.

Īsi norādījumi vērtēšanai

9.3. Par piemēru bez minimālitātes pierādījuma – 5 punkti.

9.5. Par piemēru bez pierādījuma, ka N nevar būt lielāks – 6 punkti.

10.1. Par katru daļu – 5 punkti.

10.5. Parādīts piemērs, ka var būt 1.vieta – 5 punkti;
Parādīts piemērs, ka var būt 16. vieta – 2 punkti;
Pamatots, ka nevar būt zemākā kā 16. vieta – 3 punkti.

11.3. Atrasts tikai pozitīvais atrisinājums – 7 punkti.

11.4. Par piemēru bez pierādījuma – 3 punkti.

12.1. Par pārveidojumiem bez rezultāta ne vairāk par 2 punktiem.

12.2. Par speciālgadījumu apskatīšanu – līdz 3 punktiem.

Vispārēji ieteikumi olimpiāžu darbu vērtēšanai, ja nav doti citi norādījumi

– (svītriņa) – uzdevums nav risināts; tīrrakstā nav minēts pat uzdevuma numurs.
0 punkti – tīrrakstā minēts uzdevuma numurs, bet risinājumā nav nevienas vērtīgas idejas, kas varētu vest pie pareiza atrisinājuma.
1-2 punkti – dažas derīgas idejas, bet bez tālākas izmantošanas vai pamatojuma.
3-4 punkti – veiksmīgi iesākts risinājums, bet nav saskatīts virziens, kā turpināt iesākto un novest līdz galam.
5 punkti – puse risinājuma.
6 punkti – pareizi iesākts un turpināts risinājums, kas tomēr nav paspēts vai prasts novest līdz pašam galam.
7 punkti – principā pareizs risinājums, bet ir kāda lielāka iebilde, nepilnība, trūkums.
8-9 punkti – uzdevums atrisināts, bet risinājumam nelieli defekti – trūkst kāda paskaidrojuma, izlaistas mazāk būtiskas, bet tomēr nepieciešamas detaļas utml.
10 punkti – absolūti pareizs un skaidri saprotami pierakstīts risinājums bez iebildēm, piebildēm un citiem trūkumiem.

Labu veiksmi Jums un Jūsu skolēniem!
A.Liepas NMS