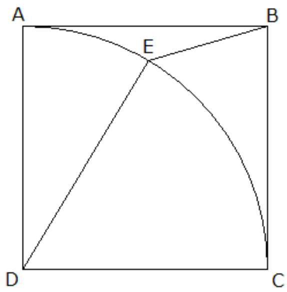
LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 61. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Apskatām funkcijas $y = ax^2 + x + b$, kur a un b – reāli skaitļi, pie tam $a + b = 2011$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti.

2. Kvadrātā ABCD ir ievilkts riņķa līnijas loks AC (riņķa līnijas centrs ir D, bet rādiuss DA; skat. zīm.). Uz loka AC atzīmēts tāds punkts E, ka ∠ADE=2∠ABE. Aprēķināt ∠ABE lielumu.



3. Aplī uzrakstīti k dažādi naturāli skaitļi. Starp tiem pāra skaitļu ir trīs reizes vairāk nekā nepāra skaitļu. Tādu vietu, kur blakus esošo skaitļu summa dalās ar 2, ir divreiz vairāk nekā tādu vietu, kur blakus esošo skaitļu summa nedalās ar 2. Kāda ir mazākā iespējamā k vērtība?

4. Pierādīt, ka nav tādu naturālu skaitļu a, x, y un z, ka $7^a = 7^x + 7^y + 7^z$.

5. Sacensībās piedalījās deviņas kamaniņbraucējas. Sacensību uzvarētāju nosaka pēc četru braucienu laiku kopsummas – kam šī summa mazāka, tā ieņem augstāku vietu. Atsevišķu sportistu braucienu laiki atsevišķos braucienos un šo laiku kopsumma visām sportistēm bija atšķirīga. Kamaniņbraucēja Maija visos braucienos ieņēma vienu un to pašu – N-to vietu. Kādai lielākajai N vērtībai iespējams, ka Maija kopvērtējumā tomēr uzvarēs, t.i., iegūs 1. vietu?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 61. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. a) Dots, ka $s+t=p$. Pierādīt, ka $2s^2 \geq p^2 - 2t^2$.

b) Dots, ka $s+t+u=p$. Pierādīt, ka $3s^2 \geq p^2 - 3t^2 - 3u^2$.

2. Trijstūrī ABC novilkts augstums AD. Zināms, ka $\mathrm{AC} > \mathrm{AB}$. Pierādīt, ka $\mathrm{DC} - \mathrm{DB} > \mathrm{AC} - \mathrm{AB}$.

3. Ar $[a]$ apzīmējam lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz *a*. Atrisināt pozitīvos skaitļos vienādojumu $x \cdot [x \cdot [x]] = 41$.

4. Trijstūris ABC ir vienādsānu (AB=BC) un $\angle$ABC=30°. Uz malas AB izvēlēts punkts E, bet uz malas BC – punkts F, tā, ka trijstūris CEF ir vienādmalu.
Aprēķināt trijstūru CEF un ABC laukumu attiecību!

5. Bobslejista Jāņa komanda piedalījās sacensībās, kurās uzvarētāju nosaka pēc četru braucienu laiku kopsummas – kam šī summa mazāka, tas ieņem augstāku vietu. Jāņa komanda pirmajā braucienā ieņēma 2., otrajā braucienā – 3., trešajā – 4., bet ceturtajā braucienā – 10. vietu. Pavisam sacensībās piedalījās 18 komandas. Atsevišķu komandu braucienu laiki atsevišķos braucienos un šo laiku kopsumma visām komandām bija atšķirīga. Kādu augstāko un kādu zemāko vietu kopvērtējumā varēja iegūt Jāņa komanda?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 61. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Pierādīt, ka visiem reāliem x, y

$$x^2 + y^2 + 4 \geq 2x + 2y + xy.$$

2. Uz izliekta četrstūra ABCD malas BC atzīmēts iekšējs punkts E, bet uz pretējās malas AD – iekšējs punkts F. Zināms, ka nogrieznis EF krusto četrstūra ABCD diagonāles to viduspunktos. Pierādīt, ka trijstūru ADE un BCF laukumi ir savā starpā vienādi!

3. Atrisināt vienādojumu sistēmu reālos skaitļos:

$$\begin{cases} x + xy + y = 17 \\ y + yz + z = 71 \\ z + zx + x = 11 \end{cases}$$

4. Zināms, ka a un b ir naturāli skaitļi, pie tam $a^b + 1$ dalās ar 21. Kāda ir mazākā iespējamā summas $a + b$ vērtība?

5. Aplī uzrakstīti n veseli skaitļi, kuru summa ir 10, pie tam katrs skaitlis ir vienāds ar tam pulksteņrādītāja virzienā sekojošo divu skaitļu starpības moduli. Atrast visas iespējamās n vērtības!

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 61. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

---

1. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu

$$\left(\frac{1}{2}-\sqrt{1-a^2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\sqrt{1-b^2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

$$\left(\frac{1}{2}-\sqrt{1-a^2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\sqrt{1-b^2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

2. Trijstūrī ABC caur patvaļīgu malas BC iekšējo punktu P tiek vilktas taisnes $u \parallel AC$ un $v \parallel AB$, kuras krusto malas AB un AC attiecīgi punktos M un N. Pierādīt, ka trijstūra ABC laukums ir vienāds ar trijstūru MBC un NBC laukumu summu.

3. Naturālu skaitli sauksim par *fantastisku*, ja tas ir vienāds ar sava kvadrāta ciparu reizinājumu. Piemēram, 1 ir *fantastisks* (jo $1^2=1$ un $1=1$), bet 4 – nē (jo $4^2=16$, bet $1\cdot 6 = 6 \neq 4$). Pierādīt, ka visi nepāra skaitļi, kas lielāki par 1, nav *fantastiski*.

4. Taisnstūrveida rūtiņu tabula sastāv no n rindām un 2011 kolonnām. Tās rūtiņās ierakstīts pa naturālam skaitlim tā, ka katrā rūtiņā ierakstītais skaitlis ir mazāks vai vienāds ar tieši vienā tās kaimiņu rūtiņā ierakstīto skaitli. Kādai lielākajai n vērtībai tas ir iespējams? (Divas rūtiņas sauksim par kaimiņu rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.)

5. Pierādīt, ka neeksistē daudzskaldnis, kuram ir nepāra skaits skaldņu un katrai skaldnei ir nepāra skaits virsotņu.