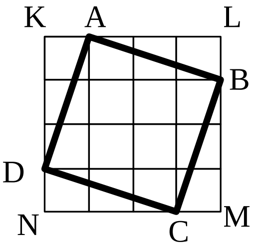
Īsi atrisinājumi.

5.1. Piemēram, 5 → 15 → 1 → 3 → 9 → 27 → 81 → 8 → 24 → 72 → 7 → 21.

5.2. Lai aprēķinātu kvadrāta ABCD laukumu, no kvadrāta KLMN laukuma jāatņem trijstūru ALB, BMC, CND, DKA laukumi (skat. 1. zīm.). Šie trijstūri kopā veido taisnstūri ar malu garumiem 2 un 3 rūtiņas.

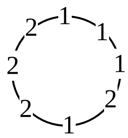
Tātad $S(ABCD) = 4 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 10$ rūtiņas.



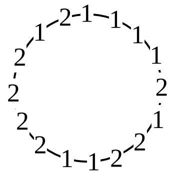
1. zīm.

1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1

2. zīm.



3. zīm.



4. zīm.

5.3. Atbilde: piemēram, 1428357.

Ievērosim, ka 14 dalās ar 7, tātad arī 1400000 dalās ar 7; 28 un 28000 dalās ar 7; 35 un 350 dalās ar 7. Tātad 1400000+28000+350+7=1428357 dalās ar 7. Uzdevuma prasības apmierina arī daudzi citi skaitļi.

5.4. a) Nē, nevar gadīties. Tad katrā rindā kopējais ziedu skaits būtu trīs nepāra saskaitāmo summa, t.i., nepāra skaitlis, bet katrā rindā jābūt 10 (pāra skaitlis) ziediem.

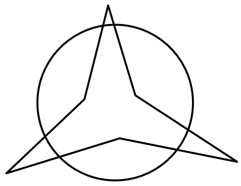
b) Jā, var. Skat., piem., 2. zīm. (Ar vienādiem cipariem apzīmētajos lauciņos jāstāda vienas krāsas tulpes, ar dažādiem – dažādu krāsu tulpes.)

5.5. a) Skat., piem., 3. zīm. **b)** Skat., piem., 4. zīm.

6.1. Piemēram, 49999 un 50000.

6.2. Pavisam šajā virknē ir 5·4·3·2·1=120 skaitļi. Interesējošais skaitlis ir pēdējais, kas sākas ar 53, un pēc šī skaitļa virknē vēl ir 6 skaitļi, kas sākas ar cipariem 54. Tātad šajā virknē skaitlis 53421 atrodas 114. vietā.

6.3. a) Skat., piem., 5. zīm.



5. zīm.

b) Nē, nevar. Lai septiņstūra malas krustotu riņķa līniju, jābūt virsotnēm, kas atrodas riņķa iekšpusē, un virsotnēm, kas atrodas riņķa ārpusē. Ar A_1 apzīmēsim septiņstūra $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ virsotni, kas atrodas riņķa iekšpusē. Lai mala A_1A_2 krustotu riņķa līniju, virsotnei A_2 jāatrodas riņķa ārpusē. Līdzīgi virsotnei A_3 jāatrodas riņķa iekšpusē, virsotnei A_4 – riņķa ārpusē, virsotnei A_5 – riņķa iekšpusē, virsotnei A_6 – riņķa ārpusē, virsotnei A_7 – riņķa iekšpusē. Bet tādā gadījumā septiņstūra malu A_1A_7 riņķa līnija nekrusto.

6.4. Nē, nevar. Ievērosim, ka divu dažādu naturālu skaitļu summa ir lielāka nekā 2, un visi pirmskaitļi, kas lielāki nekā 2, ir nepāra skaitļi. Ja uzdevuma prasības būtu iespējams izpildīt, tad blakus stāvošajiem skaitļiem būtu jābūt ar dažādu paritāti. Tā kā pa apli uzrakstīto skaitļu skaits ir 5 (nepāra), tad kādā vietā blakus atradīsies vienādas paritātes skaitļi, kuru summa būs pāra skaitlis, lielāks nekā 2, t.i., salikts skaitlis.

6.5. Uzdevumam iespējami dažādi risinājumi.

Piemēram, viens no risinājumiem.

1) Pirmajam rūķītim jautā, vai viņa iedomātais skaitlis ir lielāks nekā otrā rūķīša iedomātais skaitlis.

2) Otrajam – vai viņa iedomātais skaitlis ir lielāks nekā trešā rūķīša iedomātais skaitlis.

3) Trešajam rūķītim jautā, vai viņš ir iedomājies skaitli 2.

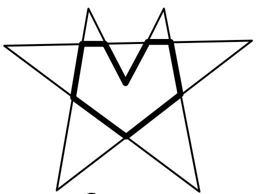
Ja uz 1) un 2) jautājumu tika saņemtas atbildes “ jā”, tad pirmā, otrā un trešā rūķīšu iedomātie skaitļi ir attiecīgi 3, 2, 1. Ja abas atbildes bija „nē”, tad iedomātie skaitļi ir attiecīgi 1, 2, 3.

Ja uz 1) jautājumu atbilde ir „ nē”, bet uz otro – „jā”, tad otrā rūķīša iedomātais skaitlis ir 3. Pārējo rūķīšu iedomātos skaitļus nosaka pēc atbildes uz 3) jautājumu.

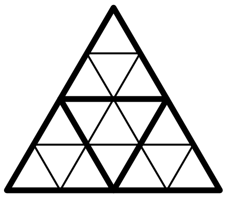
Ja uz 1) jautājumu atbilde ir „jā”, bet uz otro – „nē”, tad otrā rūķīša iedomātais skaitlis ir 1. Atkal pārējo rūķīšu iedomātos skaitļus var noteikt pēc atbildes uz 3) jautājumu.

7.1. Jā, var, piemēram: 9 → 63 → 441 → 41 → 287 → 27.

7.2. Skat., piem., 6. zīm.



6. zīm.



7. zīm.

7.3. Atbilde: tieši divi no tiem.

Vispirms pierādīsim, ka kāds no skaitļiem ir 0. Ja neviens no skaitļiem nav nulle, tad visu blakus skaitļu reizinājumi ir negatīvi, tātad jebkuri divi blakus skaitļi ir ar pretējām zīmēm. Ja mēs skaitļus apzīmējam ar *a, b, c, d, e, f, g,* tad *a* un *b* ir ar pretējām zīmēm, *b* un *c* ir ar pretējām zīmēm, tātad *a* un *c* ir ar vienādām zīmēm. Tieši tāpat pamato, ka *c* un *e* un *e* un *g* arī ir ar vienādām zīmēm. Bet tad arī *a* un *g* ir ar vienādām zīmēm un reizinājums *ag* ir pozitīvs – pretruna.

Tātad, viens no skaitļiem ir 0, pieņemsim, ka *g*=0. Tad zīmes skaitļiem *a, b, c, d, e, f* var būt vai nu “+ - + - + -” vai “- + - + - +”. Redzams, ka no reizinājumiem *abc, bcd, cde, def* divi ir pozitīvi (“- + -”) un divi negatīvi (“+ - +”). Pārējie trīs triju blakusstāvošu skaitļu reizinājumi satur reizinātāju *g*, tātad to vērtība ir 0. Tātad tieši divi no šiem reizinājumiem ir pozitīvi.

7.4. Ievērosim, ka 1004041=1014141-10100=101·10000+101·40+101·1-101·100= =101·(10000+40+1-100)=101·9941, tātad tas nav pirmskaitlis.

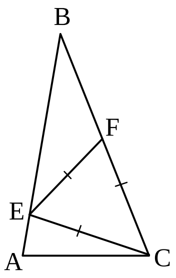
7.5. Sadalīsim sākotnējo trijstūri četros vienādmalu trijstūros ar malas garumu 2 (skat. 7. zīm.). Tā kā ir četri šādi trijstūri (kas nepārklājas), un tajos ierakstīti 9 piecinieki, tad kādā no šiem trijstūriem būs vismaz trīs piecinieki, tāpēc tajā ierakstīto skaitļu summa būs vismaz $5+5+5+3=18$, k.b.j.

8.1. Ievērosim, ka $3999991 = 4000000 - 9 = 2000^2 - 3^2 = (2000-3)\cdot(2000+3) = 1997 \cdot 2003$.

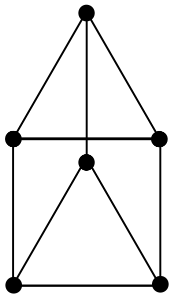
8.2. $\angle FCE=\angle CEF=\angle EFC=60°$. Tad $\angle BFE=180°-60°=120°$ (blakusleņķi) un $\angle BEF=180°-30°-120°=30°$, tātad ΔEBF – vienādsānu un BF=EF=FC (skat. 8. zīm.)

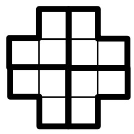
8.3. Ievērosim, ka skaitlis $\overline{aabbcc}=11\cdot\overline{a0b0c}$ dalās ar 11, taču neviens cipars nedalās ar 11. Tātad $\overline{aabbcc}$ nevar būt neviena naturāla skaitļa ciparu reizinājums.

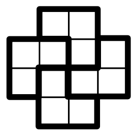
8.4. Skat., piem., 9. zīm.; katra novilktā nogriežņa garums ir 1 cm, bet pārējie attālumi starp šiem punktiem ir lielāki vai mazāki nekā 1 cm.

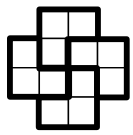


8. zīm.


9. zīm.


10. a) zīm.


10. b) zīm.


10. c) zīm.

8.5. Skat., piem., 10. zīm. attēloto figūru. Dalot to „*stūrīšos*”, sākot no augšējās rindas, iegūst trīs sadalījumus (skat. 10. a), b) un c) zīm.). Taču 10. b) un 10. c) zīm. attēlotie sadalījumi ir viens otra spoguļattēls, tāpēc ir tikai divi dažādi veidi, kā šo figūru sadalīt „ *stūrīšos*”.

Īsi norādījumi vērtēšanai.

5.4. Par katru daļu 5 punkti.

5.5. Par a) daļu 4 punkti, par b) daļu 6 punkti.

6.3. Par katru daļu 5 punkti.

7.3. Par atbildi bez pamatojuma, kāpēc tā ir vienīgā iespējamā – līdz 5 punktiem.

Vispārēji ieteikumi olimpiāžu darbu vērtēšanai, ja nav doti citi norādījumi

– (svītriņa) – uzdevums nav risināts; tīrrakstā nav minēts pat uzdevuma numurs.
0 punkti **–** tīrrakstā minēts uzdevuma numurs, bet risinājumā nav nevienas vērtīgas idejas, kas varētu vest pie pareiza atrisinājuma.
1-2 punkti – dažas derīgas idejas, bet bez tālākas izmantošanas vai pamatojuma.
3-4 punkti – veiksmīgi iesākts risinājums, bet nav saskatīts virziens, kā turpināt iesākto un novest līdz galam.
5 punkti **–** puse risinājuma.
6 punkti **–** pareizi iesākts un turpināts risinājums, kas tomēr nav paspēts vai prasts novest līdz pašam galam.
7 punkti **–** principā pareizs risinājums, bet ir kāda lielāka iebilde, nepilnība, trūkums.
8-9 punkti – uzdevums atrisināts, bet risinājumam nelieli defekti – trūkst kāda paskaidrojuma, izlaistas mazāk būtiskas, bet tomēr nepieciešamas detaļas utml.
10 punkti – absolūti pareizs un skaidri saprotami pierakstīts risinājums bez iebildēm, piebildēm un citiem trūkumiem.

Labu veiksmi Jums un Jūsu skolēniem!

LU A.Liepas NMS