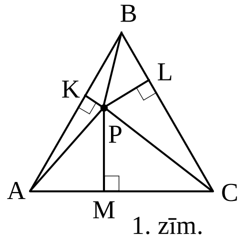
Īsi atrisinājumi.

9.1. Ja $x = 1$, tad $y = a - 2 + b = 2010$. Ja $x = -1$, tad $y = a + 2 + b = 2014$. Tātad punkti (1; 2010) un (−1; 2014) pieder visu minēto funkciju grafikiem.

9.2. Apzīmēsim dotā regulārā trijstūra ABC malas garumu ar a un augstumu ar h (skat. 1.zīm.). Tad



1. zīm.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot PK + \frac{1}{2}a \cdot PL + \frac{1}{2}a \cdot PM = \frac{1}{2}a \cdot (PK + PL + PM)$. No otras puses $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h$. Tātad $PK + PL + PM = h$ neatkarīgi no punkta P izvēles.

9.3. Atbilde: n=5, 6, 7 un $n \geq 10$.
Acīmredzot, ja $n \leq 4$, $n = 8$ vai $n = 9$, uzdevuma prasības izpildīt nav iespējams.
Ja n = 5, 6 vai 7, tad var izveidot vienu atbilstošā lieluma grupu.
Ja $n \geq 10$: $n = 10 = 5 + 5$; $n = 11 = 5 + 6$, $n = 12 = 6 + 6$, $n = 13 = 6 + 7$, $n = 14 = 7 + 7$.
Ja $n \geq 15$, varam izteikt $n = 5k + i$, $k \geq 3$, i = 0, 1, 2, 3, 4, jeb pārveidojot $n = 5(k\text{-}2) + (10+i)$. Tā kā n=10+i (i=0, 1, 2, 3, 4) cilvēkus var sadalīt vajadzīgā lieluma grupās un $5k$ var sadalīt k grupās pa 5 cilvēkiem katrā, tad visiem $n \geq 10$ uzdevuma prasības var izpildīt.

9.4. a) Apzīmējot virknes pāra locekļus ar p un nepāra ar n, iegūsim virkni n, n, p, n, n, p, n, ..., viegli saprast, ka šī virkne ir periodiska ar perioda garumu 3. Tāpēc tikai tie locekļi, kuru kārtas numurs dalās ar 3, ir pāra, tāpēc 2012. loceklis ir nepāra.
b) Turpinot virkni tālāk, iegūsim, ka tā ir

1, <u>1</u>, <u>2</u>, 5, 9, 6, 7, 5, 4, 1, 7, 0, 9, <u>1</u>, <u>2</u>, 5, ...

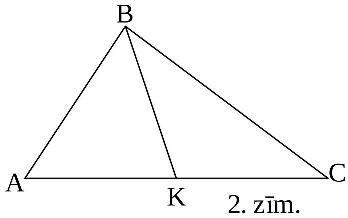
Katrs virknes loceklis ir viennozīmīgi noteikts ar diviem iepriekšējiem. Tā kā virknes otrais un trešais loceklis ir 1 un 2, un 14. un 15. loceklis arī ir 1 un 2, tad virkne, sākot ar 2. locekli, ir periodiska ar perioda garumu 12. Tāpēc 2006. loceklis ir 1 (jo $2 + 12 \cdot 167 = 2006$) un 2007. loceklis ir 2. Tāpēc 2012. loceklis ir 5.

9.5. Ievērosim: ja skaitlis x ir savstarpējs pirmskaitlis ar skaitli n, tad arī skaitlis n-x ir savstarpējs pirmskaitlis ar n. Tāpēc visus skaitļus no 1 līdz n-1, kas ir savstarpēji pirmskaitļi ar n, var sagrupēt pa pāriem x un n-x. (Ja n ir pāra skaitlis $2m$, tad m un n-m=m neveido divu dažādu skaitļu pāri, taču šo pāri neaplūkojam, jo m un $2m$ nav savstarpēji pirmskaitļi).
Katrā pārī skaitļu summa ir n. Tātad visu aplūkojamo skaitļu summa dalās ar n.

10.1. a) $(a+b)^2 = c^2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 + 2ab - b^2 = c^2 - 2b^2 \Rightarrow$
$2a^2 - (a-b)^2 = c^2 - 2b^2$.
Tā kā $(a-b)^2 \geq 0$, tad $2a^2 \geq c^2 - 2b^2$, k.b.j.
b) $(a+b+c)^2 = d^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = d^2 \Rightarrow$
$a^2 - 2b^2 - 2c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = d^2 - 3b^2 - 3c^2 \Rightarrow$
$3a^2 - (a-b)^2 - (a-c)^2 - (b-c)^2 = d^2 - 3b^2 - 3c^2$.
Tā kā $(a-b)^2 \geq 0$, $(a-c)^2 \geq 0$ un $(b-c)^2 \geq 0$, tad $3a^2 \geq d^2 - 3b^2 - 3c^2$, k.b.j.

10.2. Aplūkosim 2. zīmējumu. No trijstūru BKC un ABK līdzības seko, ka pastāv trīs iespējas.
1) $\angle BKC = \angle ABK$. Tad taisnēm KC un AB jābūt paralēlām, bet tas nav iespējams, jo tās krustojas punktā A.

2) $\angle BKC = \angle BAK$. Tad taisnēm *KB* un *AB* jābūt paralēlām, bet tas nav iespējams, jo tās krustojas punktā *B*.
Atliek trešā iespēja.
3) $\angle BKC = \angle BKA$. Tad leņķis $\angle BKC$ ir taisns, un trijstūris *BKC* ir taisnleņķa trijstūris. Tā kā ΔABC ir līdzīgs trijstūrim *BKC*, tad arī ΔABC ir taisnleņķa trijstūris.



2. zīm.

10.3. Dotos skaitļus apzīmēsim ar a, $a + 1$, $a + 2$, $a + 3$, $a + 4$, $a + 5$, $a \geq 1$. Viens no skaitļiem $a + 2$, $a + 3$ ir nepāra, pieņemsim, ka tas ir $a + 3$. Tad abi skaitļi $a + 1$ un $a + 3$ ir nepāra. Šie skaitļi abi vienlaicīgi nevar dalīties ar 3, tāpēc kāds no tiem nedalās ar 3. Tas skaitlis, kas nedalās ar 2 un 3, ir lielāks nekā 1, tāpēc tas dalās ar kādu pirmskaitli p, kas nav 2 un 3. Tāpēc $p \geq 5$. Šis pirmskaitlis der par meklēto, jo nākamais skaitlis, kas dalās ar p, ir vismaz $a + 1 + p > a + 5$, bet iepriekšējais nepārsniedz $a + 3 - p < a$. Ja nepāra skaitlis būtu $a + 2$, tad, izdarot līdzīgus spriedumus, var pierādīt, ka kāds no skaitļiem $a + 2$ vai $a + 4$ dalās ar kādu pirmskaitli $p \geq 5$, kas der par meklēto.

10.4. Pieņemsim, ka n ir skaitļa 2^{2012} ciparu skaits, m – skaitļa 5^{2012} ciparu skaits. Tad $10^{n-1} < 2^{2012} < 10^n$ un $10^{m-1} < 5^{2012} < 10^m$. Sareizināsim šīs nevienādības: $10^{n+m-2} < 10^{2012} < 10^{n+m}$. Tātad $n+m-2 < 2012 < n+m$ un vienīgā iespējamā $n+m$ vērtība (t.i., uzrakstīto ciparu skaits) ir 2013.

10.5. Skaidrs, ka der $n = 1$ (no vienas rūtiņas sastāvoša tabula vienmēr ir simetriska pret galveno diagonāli) un $n = 2$ (tā kā $a + b = a + c$, tad $b = c$, skat. 3. zīm.).
Ja $n \geq 3$, tad nosacījumus neapmierina, piemēram, 4. zīm. attēlotā tabula.

a	b
c	d

3. zīm.

0	+1	-1	0	…	0
-1	0	+1	0		0
+1	-1	0	0		0
0	0	0	0		0
…				…	0
0	0	0	0	0	0

4. zīm.

11.1. Simetrisks 8-ciparu skaitlis $\overline{abcddcba}$ dalās ar 11, jo tā ciparu summa pāra pozīcijās $a+c+d+b$ ir vienāda ar ciparu summu nepāra pozīcijās $b+d+c+a$ (summu starpība 0 dalās ar 11). Dotais skaitlis nevar būt ciparu reizinājums, jo vienam reizinātājam jādalās ar 11, bet neviens cipars nepārsniedz 9.

11.2. Visiem vienādojumiem abām pusēm pieskaitot 4, iegūstam

$$\begin{cases}(x+2)(y+2)=12\\(y+2)(z+2)=24\\(z+2)(x+2)=18\end{cases}$$

Sareizinot šos trīs vienādojumus, iegūstam

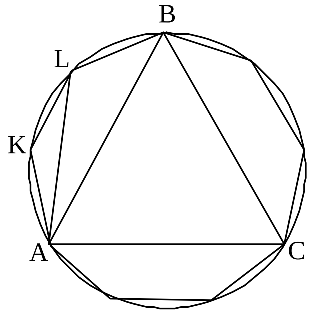
$$\left((x+2)(y+2)(z+2)\right)^2 = 72^2 \text{ jeb}$$

$$(x+2)(y+2)(z+2) = 72 \text{ vai } (x+2)(y+2)(z+2) = -72.$$

Iegūtās sakarības izdalot ar sistēmas katru vienādojumu, iegūstam

$$\begin{cases}z+2=6\\x+2=3\\y+2=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\y=2\\z=4\end{cases} \text{ vai } \begin{cases}z+2=-6\\x+2=-3\\y+2=-4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-5\\y=-6\\z=-8\end{cases}.$$

11.3. Aplūkosim regulārā trijstūra malu *AB* un trīs sekojošas deviņstūra malas *AK*, *KL* un *LB* (skat. 5. zīm.). Ievērosim, ka trijstūri *AKL* un *ALB* ir platleņķa, jo leņķi $\angle AKL$ un $\angle ALB$ balstās uz lokiem, kas ir lielāki nekā 180°. No kosinusu teorēmas seko, ka $AK^2 + KL^2 < AL^2$



5. zīm.

un $AL^2 + LB^2 < AB^2$. Tātad $AK^2 + KL^2 + LB^2 < AB^2$. Tas nozīmē, ka regulāra deviņstūra trīs malu kvadrātu summa ir mazāka nekā regulāra trijstūra malas kvadrāts. Tātad visu deviņu deviņstūra malu kvadrātu summa ir mazāka nekā regulāra trijstūra trīs malu kvadrātu summa.

11.4. Der, piemēram, aritmētiskā progresija 2, 6, 10, ..., vispārīgā locekļa formula $a_n = 4n - 2$, $n \geq 1$.

Pieņemsim, ka ir tāds *n*, ka $a_n = b^k$, kur *b* un *k* – naturāli skaitļi un $k \geq 2$. Tā kā visi virknes locekļi a_n ir pāra skaitļi, tad b^k ir pāra skaitlis un *b* arī ir pāra skaitlis. Bet tad b^k dalās ar 2^k, un pie $k \geq 2$ b^k dalās ar 4. Taču a_n ar 4 nedalās – pretruna, tāpēc minētā virkne der par meklēto.

Piezīme: šī nav vienīgā virkne, kas apmierina uzdevuma prasības.

11.5. Var rīkoties, piemēram, šādi.

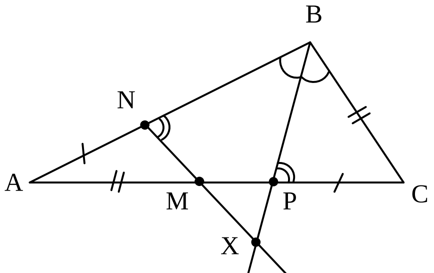
Vispirms katrā svaru kausā novieto 3 monētas. Ja svari ir līdzsvarā, tad katra 7 g smagā monēta ir savā kausā. Tad izvēlas 2 monētas no viena kausa un sver vēlreiz. Ja to masas ir vienādas, tad atlikusī monēta sver 7 g, ja nē, tad vieglākā no tām sver 7 g.

Ja pirmajā svēršanā viens svaru kauss (apzīmēsim to ar *A*) bija vieglāks, tad abas 7 g monētas ir šajā svaru kausā. Tad izvēlas 2 monētas no kausa *A* un sver vēlreiz. Ja svari ir līdzsvarā, tad atrastas abas 7 g monētas, pretējā gadījumā vieglākā no tām sver 7 gramus.

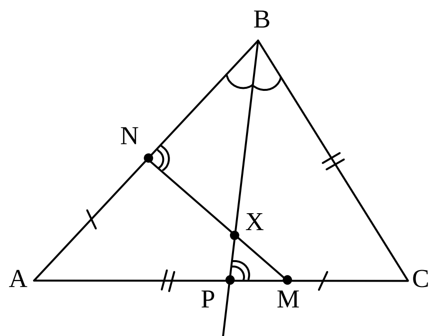
12.1. Pieņemsim, ka $x < 0$. Tad $x^3 < 0$, $x^2 > 0$ un $-2x^2 < 0$, $3x < 0$, tāpēc $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 < 0$. Tātad vienādojuma $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$ sakne *a* nevar būt negatīvs skaitlis un $a \geq 0 > -\frac{1}{2}$.

12.2. Katra šķautne ir mala tieši divām skaldnēm, tātad divkāršots daudzskaldņa šķautņu skaits ir vienāds ar visu skaldņu malu skaitu summu, tāpēc šī summa ir pāra skaitlis. Bet nepāra skaita nepāru skaitļu ir nepāra skaitlis, tad iegūstam pretrunu.

12.3. No bisektrises īpašības iegūstam $\frac{AB}{AP} = \frac{BC}{PC}$. Tā kā $AM = BC$ un $AN = PC$, tad ir spēkā $\frac{AB}{AP} = \frac{AM}{AN}$. Tāpēc $\Delta ABP \sim \Delta AMN$. No tā seko, ka $\angle ANM = \angle APB$. Savukārt $\angle BNX = 180° - \angle ANM$ un $\angle BPC = 180° - \angle APB$, tāpēc $\angle BNX = \angle BPC$. No tā iegūstam vajadzīgo pēc pazīmes *ll*.



6. zīm.



7. zīm.

Piezīme: punkts *M* var atrasties dažādās pusēs no P, kā arī sakrist ar to. Tomēr tas nekādi neietekmē uzdevuma atrisinājumu (piem., sk. 6. un 7. zīm.).

12.4. Atbilde: $p = 2$.

Ja $p = 2$, tad skaitlim $p^2 + 23 = 27$ ir tieši 4 naturāli dalītāji 1, 3, 9, 27.

Ja $p > 2$, tad *p* ir nepāra skaitlis $2k + 1$. Tādā gadījumā

$$(2k+1)^2+23=4\left(k^2+k\right)+24=4k(k+1)+24=8m+24=8\left(m+3\right). \text{ (*)}$$

Šim skaitlim ir vismaz pieci naturāli dalītāji 1, 2, 4, 8 un $8\left(m+3\right)$.

(*) $k(k+1)=2m$, jo divu pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu reizinājums pāra skaitlis.

12.5. Ar b, c, d un e apzīmējam virsotņu skaitu attiecīgi starp A_i un A_j, starp A_j un A_k, starp A_k un A_l un starp A_l un A_i. Četriniekus (B, C, D, E) var izvēlēties $b\cdot c\cdot d\cdot e$ veidos. Tā kā virsotnes B, C, D un E nevar sakrist ar A_i, A_j, A_k un A_l, tad $b+c+d+e=17-4=13$. Mums jāatrod, kādiem b, c, d, e reizinājums $b\cdot c\cdot d\cdot e$ sasniedz lielāko vērtību pie nosacījuma $b+c+d+e=13$.

Sākumā apskatām vienkāršāku problēmu: atrast maksimumu reizinājumam $b\cdot c$, ja zināms, ka $b+c=S$, S – fiksēts vesels skaitlis un b un c jābūt veseliem skaitļiem. Salīdzinot $b\cdot c$ un $(b+1)\cdot(c-1)=bc-b+c-1$, konstatējam, ka

$b\cdot c<(b+1)\cdot(c-1)$, ja $-b+c-1>0$ jeb $b<c-1$

$b\cdot c=(b+1)\cdot(c-1)$, ja $-b+c-1=0$ jeb $b=c-1$

$b\cdot c>(b+1)\cdot(c-1)$, ja $-b+c-1<0$ jeb $b>c-1$

Tātad, ja $b\cdot c$ vērtība sasniedz maksimumu, tad $b\geq c-1$. Līdzīgā veidā var izsecināt, ka $c\geq b-1$. Tas nozīmē, ka $b\cdot c$ vērtība var sasniegt maksimumu tikai, ja $b=c$, $b=c-1$ vai $c=b-1$.

Tagad atgriežamies pie sākotnējā uzdevuma. Ja $b\cdot c\cdot d\cdot e$ sasniedz maksimālo vērtību, tad reizinājumiem $b\cdot c$, $b\cdot d$, $b\cdot e$, $c\cdot d$, $c\cdot e$, $d\cdot e$ arī jāsasniedz maksimums. Tas ir iespējams tikai tad, ja katri divi no skaitļiem b, c, d un e vai nu ir vienādi, vai atšķiras tieši par 1. Un tas var notikt tikai, ja viens no b, c, d un e ir vienāds ar 4, bet visi pārējie – ar 3. Tad punktus B, C, D, E varēs izvēlēties $4\cdot 3\cdot 3\cdot 3=108$ veidos.

Šajā gadījumā virsotnes A_i, A_j, A_k, A_l, jāizvēlas tā, lai i, j, k, l apmierina sekojošus nosacījumus:

$i<j<k<l$, $i=1, 2, 3, 4$ vai 5,

$j-i=4$ vai 5, $k-j=4$ vai 5, $l-k=4$ vai 5, pie tam tieši viens no $j-i$, $k-j$, $l-k$, $17+i-l$ ir 5.

Atbilstoši šiem nosacījumiem (i, j, k, l) var izvēlēties 17 veidos: (1, 5, 9, 13), (1, 5, 9, 14), (1, 5, 10, 14), (1, 6, 10, 14), (2, 6, 10, 14), (2, 6, 10, 15), (2, 6, 11, 15), (2, 7, 11, 15), (3, 7, 11, 15), (3, 7, 11, 16), (3, 7, 12, 16), (3, 8, 12, 16), (4, 8, 12, 16), (4, 8, 12, 17), (4, 8, 13, 17), (4, 9, 13, 17), (5, 9, 13, 17).

Īsi norādījumi vērtēšanai.

9.4. Par a) daļu – 4 punkti;
par b) daļu – 6 punkti.

10.1. Par katru daļu – 5 punkti.

10.5. Pamatots, ka *n* var būt 1 – 1 punkts;
pamatots, ka *n* var būt 2 – 3 punkti;
uzrādīti pretpiemēri visiem *n* lielākiem nekā 2 – 6 punkti.

11.2. Atrasts tikai pozitīvais atrisinājums – 7 punkti.

11.4. Par piemēru bez pierādījuma – 4 punkti.

11.5. Par speciālgadījumu apskatīšanu – līdz 3 punktiem.

12.5. Par risinājumu ar pilnu atbildi bez maksimilitātes pierādījuma – 6 punkti.

Vispārēji ieteikumi olimpiāžu darbu vērtēšanai, ja nav doti citi norādījumi

– (svītriņa) – uzdevums nav risināts; tīrrakstā nav minēts pat uzdevuma numurs.
0 punkti – tīrrakstā minēts uzdevuma numurs, bet risinājumā nav nevienas vērtīgas idejas, kas varētu vest pie pareiza atrisinājuma.
1-2 punkti – dažas derīgas idejas, bet bez tālākas izmantošanas vai pamatojuma.
3-4 punkti – veiksmīgi iesākts risinājums, bet nav saskatīts virziens, kā turpināt iesākto un novest līdz galam.
5 punkti – puse risinājuma.
6 punkti – pareizi iesākts un turpināts risinājums, kas tomēr nav paspēts vai prasts novest līdz pašam galam.
7 punkti – principā pareizs risinājums, bet ir kāda lielāka iebilde, nepilnība, trūkums.
8-9 punkti – uzdevums atrisināts, bet risinājumam nelieli defekti – trūkst kāda paskaidrojuma, izlaistas mazāk būtiskas, bet tomēr nepieciešamas detaļas utml.
10 punkti – absolūti pareizs un skaidri saprotami pierakstīts risinājums bez iebildēm, piebildēm un citiem trūkumiem.

Labu veiksmi Jums un Jūsu skolēniem!

LU A.Liepas NMS