LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 62. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Apskatām visas funkcijas $y = ax^2 - 2x + b$, kur a un b – reāli skaitļi un $a + b = 2012$. Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir divi kopīgi punkti.

2. Regulāra trijstūra iekšpusē patvaļīgi izvēlēts punkts *P*. Pierādīt, ka attālumu summa no punkta *P* līdz trijstūra malām nav atkarīga no punkta *P* izvēles.

3. Kādām *n* vērtībām *n* cilvēkus var sadalīt grupās (varbūt tikai vienā) tā, lai katrā grupā būtu tieši 5, 6 vai 7 cilvēki?

4. Dota skaitļu virkne 1, 1, 2, 5, 9, 6, ... Tā tiek veidota pēc likuma: virknes pirmie divi locekļi ir 1, bet katrs nākamais ir vienāds ar divu iepriekšējo locekļu kvadrātu summas pēdējo ciparu.
a) Noteikt, vai šīs virknes 2012. loceklis ir pāra vai nepāra skaitlis.
b) Aprēķināt virknes 2012. locekli.

5. Dots naturāls skaitlis $n \geq 3$. Aplūkojam visus naturālos skaitļus no 1 līdz $n-1$ ieskaitot, kas ir savstarpēji pirmskaitļi ar skaitli *n*. Pierādīt, ka šo skaitļu summa dalās ar *n*.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 62. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

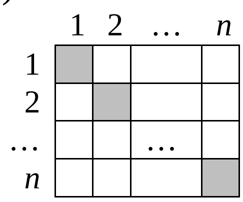
1. a) Dots, ka $a+b=c$. Pierādīt, ka $2a^2 \geq c^2 - 2b^2$.
b) Dots, ka $a+b+c=d$. Pierādīt, ka $3a^2 \geq d^2 - 3b^2 - 3c^2$.

2. Uz trijstūra *ABC* malas *AC* izvēlēts punkts *K*. Nogrieznis *BK* sadala trijstūri *ABC* divos trijstūros. Visi trīs trijstūri (ΔABC un abi dalījumā iegūtie trijstūri) ir līdzīgi. Pierādīt, ka ΔABC ir taisnleņķa trijstūris.

3. Doti seši pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi. Pierādīt, ka var atrast tādu pirmskaitli *p*, ka **tieši viens** no dotajiem skaitļiem dalās ar *p*.

4. Ir aprēķinātas skaitļu 2^{2012} un 5^{2012} vērtības un iegūtie skaitļi uzrakstīti viens aiz otra. Cik cipari uzrakstīti?

5. Dota tabula ar izmēriem $n \times n$ rūtiņas, katrā tās rūtiņā ierakstīts vesels skaitlis. Tabulas rindas un kolonnas pēc kārtas sanumurētas ar skaitļiem no 1 līdz *n*, sākot no augšējās rindas un kreisās kolonnas (skat. 1. zīm.). Zināms, ka visiem *i* izpildās sakarība: *i*-tajā rindā ierakstīto skaitļu summa ir vienāda ar *i*-tajā kolonnā ierakstīto skaitļu summu.
Atrast visus tādus *n*, kuriem visām šādām tabulām izpildās sekojoša īpašība: *i*-tās rindas *j*-tajā kolonnā ierakstītais skaitlis ir vienāds ar *i*-tās kolonnas *j*-tajā rindā ierakstīto skaitli (t.i., tabula ir simetriska attiecībā pret galveno diagonāli, skat. 1. zīm. iekrāsoto diagonāli).



1. zīm.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 62. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis *m*, kura ciparu reizinājums ir vienāds ar simetrisku 8-ciparu skaitli?
(Par *simetrisku* sauc skaitli, kas vienādi lasāms no abiem galiem.)

2. Atrisināt vienādojumu sistēmu reālos skaitļos:

$$\begin{cases} 2x + xy + 2y = 8 \\ 2y + yz + 2z = 20 \\ 2z + zx + 2x = 14 \end{cases}.$$

3. Vienā riņķa līnijā ievilkts regulārs deviņstūris un regulārs trijstūris. Kas ir lielāks: dotā deviņstūra malu kvadrātu summa vai dotā trijstūra malu kvadrātu summa?

4. Atrast augošu aritmētisku progresiju, kuras visi elementi ir naturāli skaitļi un kurai piemīt īpašība: neviens tās elements **nav** naturāla skaitļa *k*-tā pakāpe jebkuram naturālam $k \geq 2$.

5. Dotas sešas vienāda izskata monētas un sviras svari bez atsvariem. Četras no monētām sver 8 gramus katra, pārējās divas sver 7 gramus katra. Kā ar divām svēršanām atrast **vismaz** vienu monētu, kas sver 7 gramus?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 62. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Skaitlis a ir vienādojuma $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$ sakne. Pierādīt, ka $a > -\frac{1}{2}$.

2. Pierādīt, ka neeksistē daudzskaldnis, kuram ir nepāra skaits skaldņu un katrai skaldnei ir nepāra skaits virsotņu.

3. Nogrieznis BP ir trijstūra ABC bisektrise, punkti N un M ir attiecīgi malu AB un AC tādi iekšēji punkti, ka $AN = PC$ un $AM = BC$. Taisnes BP un MN krustojas punktā X. Pierādīt, ka $\Delta NBX \sim \Delta PBC$.

4. Kādiem pirmskaitļiem p skaitlim $p^2 + 23$ ir tieši četri naturāli dalītāji?

5. Regulārā 17-stūrī $A_1A_2...A_{17}$ atzīmētas četras virsotnes A_i, A_j, A_k, A_l ($i < j < k < l$). No pārējām virsotnēm ir jāizvēlas četras virsotnes (apzīmēsim tās ar B, C, D un E) tā, lai B būtu starp A_i un A_j, C būtu starp A_j un A_k, D būtu starp A_k un A_l, E būtu starp A_l un A_i. Kādām i, j, k, l vērtībām punktu četrinieku (B, C, D, E) var izvēlēties visvairāk veidos?