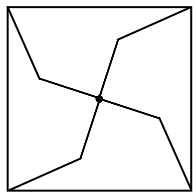
Īsi atrisinājumi.

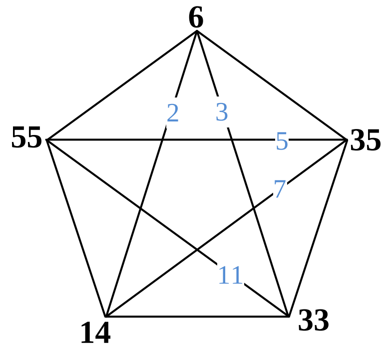
5.1. Jā, piemēram, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 4.

Piezīme. Uzdevumam ir arī vairāki citi atrisinājumi.

5.2. Skat., piemēram, 1. zīm.



1. zīm.



2. zīm.

5.3. Atbilde: piemēram, 142835.

Ievērosim, ka 14 dalās ar 7, tātad arī 140000 dalās ar 7; 28 un 2800 dalās ar 7; 35 dalās ar 7. Tātad 140000+2800+35=142835 dalās ar 7. Uzdevuma prasības apmierina arī daudzi citi skaitļi.

5.4. Skat., piemēram, 2. zīm.

Uzdevuma atrisinājumu var iegūt, piemēram, šādi. Vispirms uz katras no diagonālēm uzraksta dažādus pirmskaitļus, un pēc tam katrā virsotnē ieraksta skaitļus, kas vienādi ar to pirmskaitļu reizinājumu, kas uzrakstīti uz no šīs virsotnes izejošajām diagonālēm. Tādējādi katras diagonāles galapunktos ierakstītajiem skaitļiem LKD vienāds ar uz šīs diagonāles uzrakstīto pirmskaitli, tātad lielāks nekā 1. Savukārt no virsotnēm, kas atrodas vienas malas galapunktos, iziet dažādas diagonāles, tāpēc tajās ierakstīto skaitļu LKD=1.

Piezīme. Uzdevuma atrisinājumam pietiek parādīt vienu pareizu piemēru.

5.5. Atbilde: nē, nevar.

Pieņemsim, ka to var izdarīt. Tad no katra no 13 punktiem iziet nepāra skaits nogriežņu. Tātad kopējais nogriežņu galapunktu skaits ir nepāra skaitlis, bet tas ir pretrunā ar to, ka nogrieznim ir tieši divi galapunkti.

6.1. Atbilde: piemēram, 2, 3, 9, 18.

Piezīme. Uzdevumam ir arī vairāki citi atrisinājumi.

6.2. a) Jā, piemēram: vispirms piecos gājienos iegūst

$$(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8), (9,10) \to 1, 1, 1, 1, 1.$$

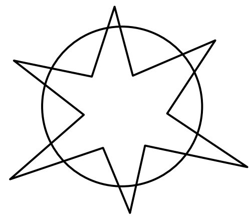
Tad četros gājienos iegūst prasīto:

$$1, 1, 1, 1, 1 \to 0, 0, 1 \to 0, 1 \to 1.$$

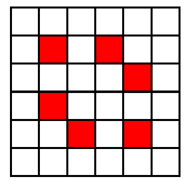
b) Ievērosim, ka, veicot doto pārveidojumu, uz tāfeles palikušo skaitļu summas paritāte nemainās (jo $(a+b)$ un $(a-b)$ ir vienas paritātes skaitļi). Sākotnējo skaitļu summa 55 ir nepāra skaitlis; tātad rezultātā nevar iegūt pāra skaitli 0.

6.3. a) Skat., piem., 3. zīm.

b) Nē, nevar. Lai 13-stūra malas krustotu riņķa līniju, jābūt virsotnēm, kas atrodas riņķa iekšpusē, un virsotnēm, kas atrodas riņķa ārpusē. Ar A_1 apzīmēsim 13-stūra $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}A_{13}$ virsotni, kas atrodas riņķa iekšpusē. Lai mala A_1A_2 krustotu riņķa līniju, virsotnei A_2 jāatrodas riņķa ārpusē. Līdzīgi virsotnei A_3 jāatrodas riņķa iekšpusē, virsotnei A_4 – riņķa ārpusē, virsotnei A_5 – riņķa iekšpusē, virsotnei A_6 – riņķa ārpusē, virsotnei A_7 – riņķa iekšpusē, virsotnei A_8 – riņķa ārpusē, virsotnei A_9 – riņķa iekšpusē, virsotnei A_{10} – riņķa ārpusē, virsotnei A_{11} – riņķa iekšpusē, virsotnei A_{12} – riņķa ārpusē, virsotnei A_{13} – riņķa iekšpusē. Bet tādā gadījumā 13-stūra malu A_1A_{13} riņķa līnija nekrusto.



3. zīm.



4. zīm.

6.4. a) Ja pirmais cipars ir 1, tad, pierakstot klāt divciparu skaitli, ar ko dalās 100, piemēram, 25, iegūstam meklēto skaitli 125.

b) Spriežot līdzīgi un izmantojot jau a) gadījumā atrasto 3 ciparu skaitli, var iegūt skaitli 1125, kas apmierina uzdevuma prasības.

c) Var pamanīt, ka 90000 dalās ar 1125, tāpēc der skaitlis 91125.

Piezīme. Uzdevumam katrā apakšpunktā ir arī vairāki citi atrisinājumi.

6.5. Atbilde: var iekrāsot gan 7, gan 6 rūtiņas tā, lai uzdevuma prasības būtu izpildītas.
4. zīm. parādīts, kā var iekrāsot 6 rūtiņas; šajā zīmējumā iekrāsojot vēl vienu jebkuru rūtiņu, uzdevuma prasības tiks apmierinātas. Ir arī citi veidi, kā var iekrāsot 7 rūtiņas.

7.1. Izveidosim tabulu, ar ko pārī var būt apvienots katrs no dotajiem skaitļiem.

1	3, 8, 15
2	7, 14
3	1, 6, 13
4	5, 12
5	4, 11
6	3, 10
7	2, 9, 18
8	1, 17
9	7, 16

10	6, 15
11	5, 14
12	4, 13
13	3, 12
14	2, 11
15	1, 10
16	9
17	8
18	7

Ievērosim, ka 18 var būt apvienots pārī tikai ar 7, 17 ar 8 un 16 ar 9. Tālāk pakāpeniski secinām, ka 2 ir apvienots ar 14, 11 ar 5, 4 ar 12, 13 ar 3, 6 ar 10 un 1 ar 15.

Atbilde: 1 ir apvienots pāri ar 15.

7.2. Atbilde: 162.

111=3·37, tāpēc vienam no skaitļiem x, x+1 vai x+2 jādalās ar 37. (Starp trīs pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem viens noteikti dalās ar 3, tāpēc dotais reizinājums vienmēr dalās ar 3.)

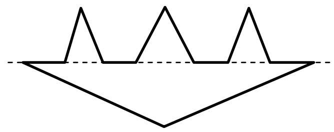
No 1 līdz 2013 ir 54 skaitļi, kas dalās ar 37 (lielākais 1998).

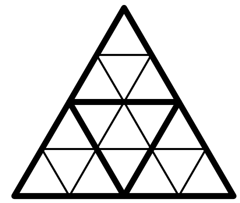
Tātad 54 veidos var izvēlēties tādu x, kas dalās ar 37, 54 veidos – tādu x, ka x+1 dalās ar 37 un 54 veidos – tādu x, ka x+2 dalās ar 37, t.i., pavisam ir 54+54+54=162 tādi skaitļi x, ka $x(x+1)(x+2)$ dalās ar 111.

7.3. a) Ja 11-stūra 8 virsotnes atrodas uz vienas taisnes, tad 3 virsotnes uz tās neatrodas. Apzīmēsim tās ar A, B un C. Tad no pārējām 8 virsotnēm daļa atrodas starp A un B, daļa –

starp B un C un daļa – starp C un A. Pēc Dirihlē principa kādā no šīm daļām ir vismaz 3 virsotnes un tās visas atrodas uz vienas taisnes – pretruna.

b) Jā, var; skat. piemēram, 5. zīm.


5. zīm.


6. zīm.

7.4. Pieņemsim, ka to var izdarīt. Ievērosim, ka tādā gadījumā visu skaitļu paritātes ir vienādas. Ja visi skaitļi ir nepāra, tad tiem visiem pieskaitīsim 1, uzdevumā dotā īpašība joprojām izpildīsies (blakus esošo skaitļu starpība nemainīsies). Ja visi skaitļi ir pāra skaitļi (sākumā dotie vai iepriekš aprakstītās darbības rezultātā iegūtie), izdalīsim tos visus ar 2.

Tagad blakus stāvošo skaitļu starpības būs 3, 5, 7 vai 9. Ievērosim, ka tagad blakus stāvošo skaitļu paritātes ir dažādas, bet 13 skaitļu gadījumā tas nav iespējams.

7.5. Sadalīsim sākotnējo trijstūri četros vienādmalu trijstūros ar malas garumu 2 (skat. 6. zīm.). Tā kā ir četri šādi trijstūri (kas nepārklājas), un tajos ierakstīti 9 piecinieki, tad kādā no šiem trijstūriem būs vismaz trīs piecinieki, tāpēc tajā ierakstīto skaitļu summa būs vismaz $5+5+5+3=18$, k.b.j.

8.1. Ievērosim, ka $8999999 = 9000000 - 1 = 3000^2 - 1^2 = (3000-1)\cdot(3000+1) = 2999\cdot 3001$.

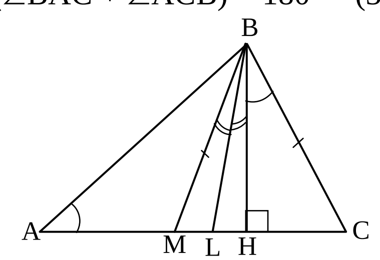
8.2. Atbilde: $\angle A = 30°$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 60°$.

Tā kā $\angle MBL = \angle LBH$ un BL ir bisektrise, tad $\angle CBH = \angle ABM = \angle BAC$ un ΔAMB ir vienādsānu un BM = AM (skat. 7. zīm.).

Tā kā MC=AM=BM=BC, tad ΔMBC ir vienādmalu un $\angle MBC = \angle BCM = \angle CMB = 60°$.

BH ir vienādmalu trijstūra MBC augstums, tātad arī bisektrise, tāpēc $\angle BAC = \angle CBH = 60° : 2 = 30°$.

$\angle ABC = 180° - (\angle BAC + \angle ACB) = 180° - (30° + 60°) = 90°$.



7. zīm.

2^6	2^7	2^2
2^1	2^5	2^9
2^8	2^3	2^4

8. zīm.

8.3. Atbilde: 8375.

Pavisam ir 9000 četrciparu skaitļi. No tiem $5^4 = 625$ skaitļi satur tikai nepāra ciparus. Tātad $9000 - 625 = 8375$ četrciparu skaitļu pierakstā ir vismaz viens pāra cipars.

8.4. To var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 8. zīm.

Izmantojot pakāpju īpašību $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, atrisinājumu var iegūt, tabulā ierakstot pakāpes ar vienādām bāzēm tā, lai kāpinātāju summa katrā rindiņā un katrā kolonnā būtu viena un tā pati.

8.5. a) Sanumurēsim pozīcijas no 1 līdz 20. Mums jāpanāk, ka pozīcijās no 1 līdz 10 stāv zēni, bet no 11 līdz 20 – meitenes.

Aplūkosim pirmo pozīciju. Ja tur stāv zēns, tad viss jau kārtībā. Ja meitene, tad kādā no pozīcijām 2 līdz 11 noteikti stāv kāds zēns (jo vēl ir tikai 9 meitenes), tātad to var samainīt vietām ar 1. pozīcijā stāvošo meiteni. Šādā veidā pirmajā solī ar vienu vai nevienu maiņu var panākt, ka pirmajā pozīcijā stāv zēns.
Tālāk otrajā solī tieši tādā pašā veidā panāk, ka otrajā pozīcijā stāv zēns, trešajā solī – ka trešajā pozīcijā stāv zēns utt.
Ar 10 soļiem, t.i., ar ne vairāk kā 10 maiņām var panākt, ka visās pozīcijās no 1 līdz 10 stāv zēni.
b) Aplūkosim sākuma situāciju, kad meitenes stāv pozīcijās no 1 līdz 10, bet zēni – pozīcijās no 11 līdz 20. Katrā maiņā piedalās tikai viens zēns (2 zēnu mainīšana vietām neko nemaina), tāpēc pēc 9 maiņām noteikti būs vismaz viens zēns, kas savu vietu nebūs mainījis, tātad joprojām atradīsies kādā no pozīcijām no 11 līdz 20.