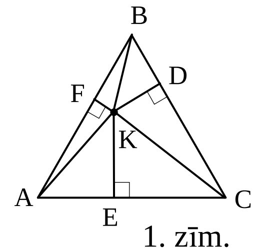
Īsi atrisinājumi

9.1. Jā, piem., $111111111^2 = 12345678987654321$.

9.2. Apzīmēsim dotā regulārā trijstūra ABC malas garumu ar a un augstumu ar h (skat. 1.zīm.). Tad $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot KD + \frac{1}{2}a \cdot KE + \frac{1}{2}a \cdot KF = \frac{1}{2}a \cdot (KD + KE + KF)$. No otras puses $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h$. Tātad $KD + KE + KF = h$ neatkarīgi no punkta K izvēles.



1. zīm.

9.3. Ja a un b, $a \geq b$ ir taisnstūra malu garumi, tad $ab = 2a + 2b$. Pārveidojot, iegūstam $ab - 2a - 2b + 4 = 4$ jeb $(a-2)(b-2) = 4$. Iegūtajam vienādojumam naturālos skaitļos ir divi atrisinājumi:

- $a - 2 = b - 2 = 2$ jeb $a = b = 4$;
- $a - 2 = 4$ un $b - 2 = 1$ jeb $a = 6$ un $b = 3$.

9.4. Tā kā visi a_i (i=1, 2, ..., 2013) ir naturāli skaitļi, to mazākā iespējamā vērtība ir 1. Ja kāds no dotajiem skaitļiem $a_k = 1$, tad nevienādība $a_k = 1 > \sqrt{a_{k+1}}$ nav patiesa nevienam naturālam skaitlim a_{k+1}, Tātad mazākā iespējamā skaitļu a_i vērtība ir 2. Viegli pārbaudīt, ka $a_1 = a_2 = ... = a_{2013} = 2$ apmierina dotās nevienādības, tāpēc summas $a_1 + a_2 + ... + a_{2013}$ mazākā iespējamā vērtība ir $2 + 2 + ... + 2 = 2 \cdot 2013 = 4026$.

9.5. No trīs uzdevumiem var izveidot 8 dažādus atrisināto uzdevumu „komplektus” (t.sk., neviens atrisināts uzdevums). Ja katru „komplektu” būtu atrisinājuši ne vairāk kā 12 skolēni, tad skolēnu kopējais skaits būtu ne vairāk kā $12 \cdot 8 = 96 < 100$. Tātad ir vismaz 13 skolēni, kas izrēķinājuši vienus un tos pašus uzdevumus.
Piezīme. Dotā uzdevuma risinājumā izmantots Dirihlē princips.

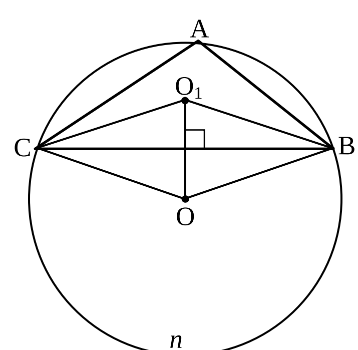
10.1. Tā kā visi a_i (i=1, 2, ..., 10) ir naturāli skaitļi, to mazākā iespējamā vērtība ir 1. Ja kāds no dotajiem skaitļiem $a_k = 1$, tad nevienādība $a_k = 1 > \sqrt{a_{k+1}}$ nav patiesa nevienam naturālam skaitlim a_{k+1}. Tātad mazākā iespējamā skaitļu a_i vērtība ir 2. Viegli pārbaudīt, ka $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $a_4 = 5$, $a_5 = 6$, $a_6 = 7$, $a_7 = 8$, $a_8 = 9$, $a_9 = 10$, $a_{10} = 11$ apmierina dotās nevienādības. Tā kā tie ir mazākie dažādie naturālie skaitļi, kas apmierina dotās nevienādības, tad summas $a_1 + a_2 + ... + a_{10}$ mazākā iespējamā vērtība ir

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 65.$$

10.2. Atbilde: 36°, 36°, 108°.

Tā kā ∆ABC apvilktās un ievilktās riņķa līniju centri ir simetriski vienu trijstūra malām (apzīmēsim to ar BC; skat. 2. zīm.), tad viens no tiem atrodas ∆ABC iekšpusē, bet otrs – ārpusē. Tā kā ievilktās riņķa līnijas centrs O_1 vienmēr atrodas trijstūra iekšpusē, tad apvilktās riņķa līnijas centrs O atrodas ∆ABC ārpusē un ∆ABC ir platleņķa trijstūris.

OC=OB kā apvilktās riņķa līnijas rādiusi, tad ∆BOC ir vienādsānu. Apzīmēsim ∠OCB=∠OBC=x. Tad ∠BOC=180°–2x=∪BAC.



2. zīm.

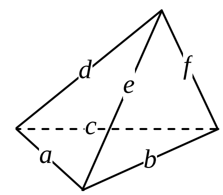
Tā kā O_1 ir simetrisks O attiecībā pret taisni BC, tad $\angle O_1BC=\angle OBC=x$ un $\angle O_1CB=\angle OCB=x$. Ievilktās riņķa līnijas centrs atrodas bisektrišu krustpunktā, tāpēc $\angle CBO_1=\angle O_1BA=x$ un $\angle BCO_1=\angle O_1CA=x$.

Apskatām ΔABC leņķus: $\angle BAC=\frac{1}{2}\cup BnC=\frac{1}{2}(360°-(180°-2x))=90°+x$, $\angle ACB=\angle CBA=2x$. Tad $90°+x+2x+2x=180°$ jeb $5x=90°$ un $x=18°$. Tātad $\angle ACB=\angle CBA=36°$, $\angle BAC=108°$.

10.3. Apzīmēsim piramīdas šķautņu garumus kā parādīts 3. zīm.

Pieņemsim, ka *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* ir dažādi skaitļi. Tā kā visu skaldņu perimetri ir vienādi, tad

$$\begin{cases} a+b=d+f \\ a+c=e+f \\ b+c=d+e \end{cases}$$



3. zīm.

Saskaitot pirmos divus vienādojumus un no tiem atņemot trešo vienādojumu, iegūstam $2a = 2f$ jeb $a = f$ – pretruna.

10.4. Pieņemsim, ka n ir skaitļa 2^{2013} ciparu skaits, m – skaitļa 5^{2013} ciparu skaits. Tad $10^{n-1}<2^{2013}<10^n$ un $10^{m-1}<5^{2013}<10^m$. Sareizināsim šīs nevienādības: $10^{n+m-2}<10^{2013}<10^{n+m}$. Tātad $n+m-2<2013<n+m$ un vienīgā iespējamā $n+m$ vērtība (t.i., uzrakstīto ciparu skaits) ir 2014.

10.5. No septiņiem dažādiem skaitļiem var izveidot (6·7):2=21 dažādus pārus. Dotie skaitļi ir dažādi, pie tam nav mazāki kā 1 un nav lielāki kā 21, tāpēc divu šādu skaitļu starpības vērtība ir vismaz 1 un nepārsniedz 21-1=20. Tā kā starpības var pieņemt tikai 20 dažādas vērtības, bet pavisam var izveidot 21 dažādu skaitļu pāri, tad vismaz divu pāru skaitļu starpības būs vienādas.

11.1. Atbilde: atrisinājumi ir (0; 0) un (1; 0).

Pārveidosim vienādojumu formā

$$x(x-1)=y^2$$

Ja $x = 0$ vai $x = 1$, tad $y = 0$ un atrisinājums eksistē.

Pieņemsim, ka $x > 1$. Tad ir spēkā stingrā nevienādība

$$(x-1)^2<x(x-1)<x^2.$$

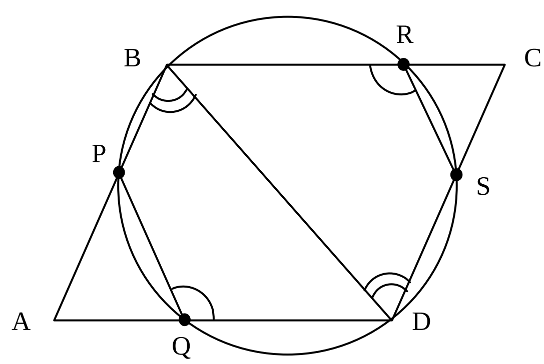
Tā kā $x(x-1)$ atrodas starp divu secīgu veselu skaitļu kvadrātiem, tad tas nevar būt vesela skaitļa kvadrāts.

Līdzīgi, ja $x < 0$, tad ir spēkā stingrā nevienādība

$$x^2<x(x-1)<(x-1)^2.$$

Tātad arī šajā gadījumā $x(x-1)$ nevar būt vesela skaitļa kvadrāts.

11.2. Novilksim diagonāli BD; apzīmēsim $\angle PQD=\alpha$ (skat. 4. zīm.). Tā kā četrstūris PQDB ir ievilkts riņķa līnijā, tad $\angle PBD=180°-\angle PQD=180°-\alpha$. No tā, ka ABCD ir paralelograms un $AB \parallel CD$ seko, ka $\angle SDB=\angle PBD=180°-\alpha$. Četrstūris SRBD arī ir ievilkts riņķa līnijā, tāpēc



4. zīm.

$\angle SRB = 180° - \angle SDB = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$. Atliek ievērot, ka taisnes PQ un RS veido vienādus leņķus α ar paralēlām taisnēm AD un BC, tāpēc tās arī ir paralēlas.

11.3. Var rīkoties, piemēram, šādi.

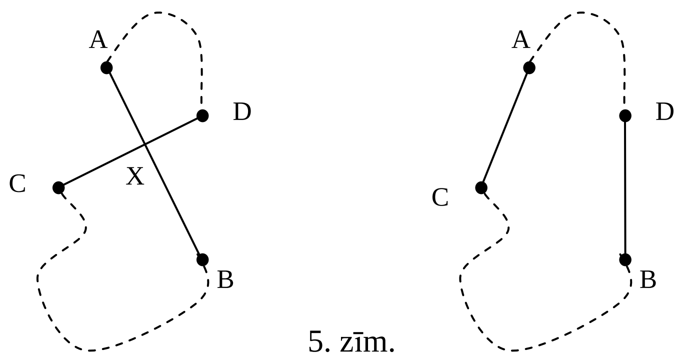
Vispirms katrā svaru kausā novieto trīs monētas. Ja svari ir līdzsvarā, tad katra 9 g smagā monēta ir savā kausā. Tad izvēlas divas monētas no viena kausa un sver vēlreiz. Ja to masas ir vienādas, tad atlikusī monēta sver 9 g; ja nē, tad vieglākā no tām sver 9 g.

Ja pirmajā svēršanā viens svaru kauss (apzīmēsim to ar *A*) bija vieglāks, tad abas 9 g monētas ir šajā svaru kausā. Tad izvēlas divas monētas no kausa *A* un sver vēlreiz. Ja svari ir līdzsvarā, tad atrastas abas 9 g monētas, pretējā gadījumā vieglākā no tām sver 9 gramus.

11.4. Apzīmēsim $F(x) = P(x) - 2000$. Tādā gadījumā *a*, *b*, *c*, *d* ir polinoma $F(x)$ saknes un $F(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)R(x)$.

Ja $P(n) = 2013$, tad $F(n) = 13 = (n-a)(n-b)(n-c)(n-d)R(n)$. Taču skaitli 13 nevar izteikt kā ne mazāk kā 4 dažādu veselu skaitļu reizinājumu.

11.5. Aplūkosim visas iespējamās slēgtās lauztās līnijas, kas katra sastāv no *n* posmiem un visi tās *n* lauzuma punkti ir dotajos punktos. Pierādīsim, ka no tām lauztā līnija ar vismazāko perimetru arī ir meklētais *n*-stūris. Pieņemsim pretējo, ka šādai lauztai līnijai kādi divi posmi AB un CD krustojas punktā X, pie tam lauztā līnija turpinās no punkta A uz D un no punkta B uz C (skat. 5. zīm.):



5. zīm.

Izdzēšam nogriežņus AB un CD, un uzzīmējam nogriežņus AC un BD. Pierādīsim, ka lauztās līnijas perimetrs samazinājās.

No trijstūra nevienādības seko, ka $AC < AX + XC$ un $BD < BX + XD$. Tāpēc $AC + BD < (AX + XC) + (BX + XD) = (AX + BX) + (XC + XD) = AB + CD$, un jaunās lauztās līnijas perimetrs ir mazāks nekā iepriekšējās, kas ir pretrunā ar pieņēmumu.

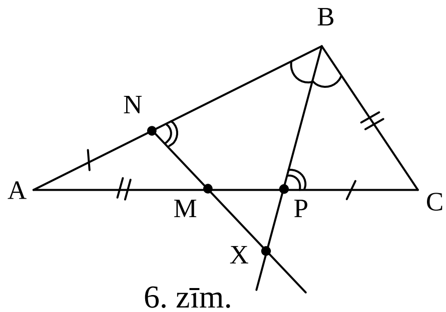
12.1. Pārveidosim doto nevienādību:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} > \frac{1}{4(a+b)} \Leftrightarrow a+b-\frac{1}{2(a+b)} > 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (a+b)^2 - 1 + \frac{1}{4(a+b)^2} > 4ab \Leftrightarrow$$

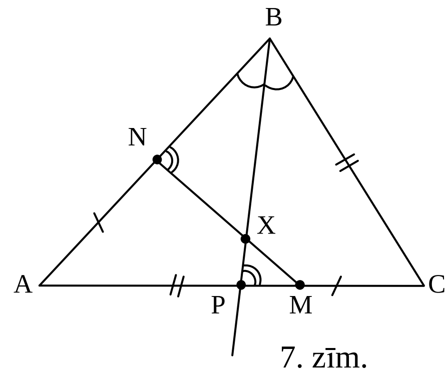
$$(a-b)^2 + \frac{1}{4(a+b)^2} > 1.$$

Tā kā *a* un *b* ir divi dažādi naturāli skaitļi, tad $(a-b)^2 \geq 1$ un $\frac{1}{4(a+b)^2} > 0$, līdz ar to pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī visas iepriekšējās, t.sk. dotā, nevienādības ir patiesas, k.b.j.

12.2. No bisektrises īpašības iegūstam $\frac{AB}{AP} = \frac{BC}{PC}$. Tā kā $AM = BC$ un $AN = PC$, tad ir spēkā $\frac{AB}{AP} = \frac{AM}{AN}$. Tāpēc $\Delta ABP \sim \Delta AMN$. No tā seko, ka $\angle ANM = \angle APB$. Savukārt $\angle BNX = 180° - \angle ANM$ un $\angle BPC = 180° - \angle APB$, tāpēc $\angle BNX = \angle BPC$. No tā iegūstam vajadzīgo pēc pazīmes *ll*.



6. zīm.



7. zīm.

Piezīme: punkts *M* var atrasties dažādās pusēs no P, kā arī sakrist ar to. Tomēr tas nekādi neietekmē uzdevuma risinājumu (piem., sk. 6. un 7. zīm.).

12.3. Ievērosim, ka $n^2 + 3n + 3 \equiv 1^2 + 3 + 3 \equiv 0 \pmod 7$. Tātad skaitlis $n^2 + 3n + 3$ dalās ar 7 un tā pirmreizinātāji var būt tikai skaitlis 7 vai arī tādi pirmskaitļi, kas nepārsniedz $\frac{n^2 + 3n + 3}{7}$.

Pamatosim, ka $7 < n^2$ un $\frac{n^2 + 3n + 3}{7} < n^2$.

Tā kā $n \equiv 1 \pmod 7$ un $n > 1$, tad $n \geq 8$. Taču tad $n^2 \geq 8^2 > 7$.

Nevienādība $\frac{n^2 + 3n + 3}{7} < n^2$ ir ekvivalenta nevienādībai $n^2 + 3n + 3 < 7n^2 \Leftrightarrow 2n^2 - n - 1 > 0$.

Atliek ievērot, ka funkcija $f(x) = 2x^2 - x - 1 = (x-1)(2x+1)$ pieņem pozitīvas vērtības intervālā $(1;+\infty)$, tātad $2n^2 - n - 1 > 0$ visiem naturāliem skaitļiem $n > 1$.

12.4. Sauksim par doto 6 trijstūru sānu malām tās malas, kas atrodas uz sešstūra malām. Aplūkosim šo trijstūru abu sānu malu garumu summas. Tā kā dotā sešstūra perimetrs ir vienāds ar 6, no Dirihlē principa seko, ka vismaz viena šāda summa nav lielāka kā 1 (jo visas trijstūru sānu malas pilnībā nosedz visas sešstūra malas). Apzīmēsim šo trijstūri ar Δ un tā sānu malas ar *a* un *b*, tad $a + b \leq 1$. No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko seko:

$$2\sqrt{ab} \leq a + b \leq 1$$

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$ab \leq \frac{1}{4} \qquad (1)$$

Trijstūra Δ laukumu varam aprēķināt pēc formulas $\frac{1}{2} ab \sin\alpha$, kur α ir leņķis starp malām *a* un *b*. Tā kā dots regulārs sešstūris, tad $\alpha = 120°$. Tāpēc trijstūra Δ laukums ir vienāds ar

$$\frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{1}{2}ab\sin 120° = \frac{1}{2}ab\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}ab \qquad (2)$$

No (1) un (2) seko, ka trijstūra Δ laukums nav lielāks kā $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{16}$, k.b.j.

12.5. Pierādīsim vispārīgāku apgalvojumu: ja parlamentā ir n deputāti un katram no viņiem ir domstarpības ar ne vairāk kā d citiem deputātiem, kur $0 \le d \le n$, tad deputātus var sadalīt $d+1$ komisijā tā, lai vienas komisijas nekādiem diviem deputātiem nebūtu domstarpību savā starpā. Tādā gadījumā uzdevumā prasītais sekos no pierādītā apgalvojuma, ja $n = 2013$. Pierādāmo apgalvojumu pamatosim ar matemātisko indukciju pēc n.

Indukcijas bāze. Ja $n = d+1$, tad katrā no $d+1$ komisijām iekļaujam tieši vienu deputātu. Acīmredzami, ka tad starp vienas komisijas locekļiem nekādiem diviem deputātiem nebūtu domstarpību savā starpā.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka gadījumā, ja parlamentā ir n deputāti, tad viņus var sadalīt vajadzīgajā veidā.

Induktīvā pāreja. Pieņemsim, ka parlamentā ir $n+1$ deputāts; parādīsim, ka arī tad viņus var sadalīt $d+1$ komisijā vajadzīgajā veidā.

Izvēlamies patvaļīgu deputātu A. Atlikušos n deputātus sadala $d+1$ komisijā tā, lai starp vienas komisijas locekļiem nekādiem diviem deputātiem nebūtu domstarpību savā starpā (ko var izdarīt, saskaņā ar induktīvo pieņēmumu). Deputātam A ir domstarpības ar ne vairāk kā d citiem deputātiem, taču izveidota $d+1$ komisija. Tas nozīmē, ka ir vismaz viena tāda komisija, ka A nav domstarpību ne ar vienu šīs komisijas deputātu. Tad A varam iekļaut šajā komisijā, līdz ar ko arī $n+1$ deputāts ir sadalīts $d+1$ komisijā vajadzīgajā veidā. Induktīvā pāreja ir izdarīta, tātad apgalvojums ir pierādīts.