LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 63. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis, kura kvadrāta pēdējie 9 cipari ir 987654321 ?

2. Regulāra trijstūra iekšpusē patvaļīgi izvēlēts punkts *K*. Pierādīt, ka attālumu summa no punkta *K* līdz trijstūra malām nav atkarīga no punkta *K* izvēles.

3. Taisnstūra malu garumi ir veseli skaitļi, bet tā perimetrs un laukums izsakās ar vienu un to pašu skaitli. Atrast visus šādus taisnstūrus.

4. Zināms, ka a_1, a_2, ..., a_{2013} ir tādi naturāli skaitļi, ka $a_1 > \sqrt{a_2}$, $a_2 > \sqrt{a_3}$, ..., $a_{2012} > \sqrt{a_{2013}}$ un $a_{2013} > \sqrt{a_1}$. Aprēķināt mazāko iespējamo summas $a_1 + a_2 + ... + a_{2013}$ vērtību.

5. Profesora Cipariņa olimpiādē bija 3 uzdevumi. Tajā piedalījās 100 skolēni. Pierādīt, ka atradīsies vismaz 13 skolēni, kas izrēķināja vienus un tos pašus uzdevumus (vai arī neizrēķināja nevienu uzdevumu).
Katrs skolēns katru uzdevumu vai nu izrēķināja vai neizrēķināja, daļēji risinājumi netika iesniegti.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 63. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Zināms, ka a_1, a_2, ..., a_{10} ir <u>dažādi</u> naturāli skaitļi tādi, ka $a_1 > \sqrt{a_2}$, $a_2 > \sqrt{a_3}$, ..., $a_9 > \sqrt{a_{10}}$ un $a_{10} > \sqrt{a_1}$. Aprēķināt mazāko iespējamo summas $a_1 + a_2 + ... + a_{10}$ vērtību.

2. Trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas un ievilktās riņķa līnijas centri ir simetriski attiecībā pret vienu no trijstūra ABC malām. Aprēķināt trijstūra ABC leņķus.

3. Vai eksistē tāda trijstūra piramīda, kurai katras skaldnes perimetrs ir 2013 un kurai nav vienāda garuma šķautņu?

4. Ansītis aprēķināja skaitļu 2^{2013} un 5^{2013} vērtības un iegūtos skaitļus uzrakstīja vienu aiz otra. Cik cipari uzrakstīti?

5. Doti 7 dažādi naturāli skaitļi, kuri nepārsniedz 21. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties divus skaitļu pārus, kuru starpības ir vienādas. (Skaitļu pāriem var būt arī kopīgs skaitlis, starpību aprēķina no lielākā skaitļa atņemot mazāko.)

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 63. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $(x-y)(x+y)=x$.

2. Caur paralelograma ABCD virsotnēm B un D ir novilkta riņķa līnija, kas krusto malas AB, DA, BC un CD attiecīgi to iekšējos punktos P, Q, R un S. Pierādīt, ka $\mathrm{PQ} \parallel \mathrm{RS}$.

3. Dotas sešas vienāda izskata monētas un sviras svari bez atsvariem. Četras no monētām sver 10 gramus katra, pārējās divas sver 9 gramus katra. Kā ar divām svēršanām atrast vismaz vienu monētu, kas sver 9 gramus?

4. Polinoms $P(x)$ ar veseliem koeficientiem četrām veselām x vērtībām pieņem vērtību 2000. Pierādīt, ka nav tādas veselas x vērtības, pie kuras dotais polinoms pieņem vērtību 2013.

5. Plaknē doti $n \geq 3$ patvaļīgi izvietoti punkti. Zināms, ka nekādi 3 no tiem neatrodas uz vienas taisnes. Pierādīt, ka eksistē tāds n-stūris (iespējams, ieliekts), kura virsotnes atrodas šajos punktos. Daudzstūra malas nedrīkst krustoties.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 63. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

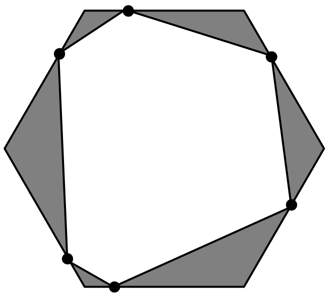
1. Zināms, ka a un b ir divi dažādi naturāli skaitļi. Pierādīt, ka

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}>\frac{1}{4(a+b)}.$$

2. Nogrieznis BP ir trijstūra ABC bisektrise, punkti N un M ir attiecīgi malu AB un AC tādi iekšēji punkti, ka $AN=PC$ un $AM=BC$. Taisnes BP un MN krustojas punktā X. Pierādīt, ka $\Delta NBX \sim \Delta PBC$.

3. Dots, ka $n>1$ ir tāds naturāls skaitlis, kas, dalot ar 7, dod atlikumu 1. Pierādīt, ka skaitļa n^2+3n+3 visi pirmreizinātāji ir mazāki nekā n^2.

4. Dots regulārs sešstūris ar malas garumu 1. Uz katras malas ir patvaļīgi izvēlēts viens punkts (skat. 1. zīm.). Pierādīt, ka vismaz viena iekrāsotā trijstūra laukums nepārsniedz $\frac{\sqrt{3}}{16}$.



1. zīm.

5. Parlamentā ir 2013 deputāti; katram no viņiem ir domstarpības ar ne vairāk kā d ($0 \le d \le 2012$) citiem deputātiem. Domstarpības ir abpusējas: ja A ir domstarpības ar B, tad arī B ir domstarpības ar A. Pierādīt, ka deputātus var sadalīt $d+1$ komisijā tā, lai nekādiem diviem vienas komisijas locekļiem nebūtu domstarpību savā starpā.