Latvijas 54. matemātikas olimpiādes
4. kārtas uzdevumi

1. Dots, ka x_1, x_2, ..., x_n – kaut kādi reāli skaitļi. Pierādīt, ka eksistē tāds reāls skaitlis a, ka visi skaitļi x_1+a, x_2+a, x_3+a, ..., x_n+a ir iracionāli.

2. Šaurleņķu trijstūrī ABC ievilktā riņķa līnija pieskaras tā malām AB, BC, CA attiecīgi punktos C_1, A_1, B_1. No nogriežņu A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 viduspunktiem vilkti perpendikuli attiecīgi pret AB, BC, CA. Pierādīt, ka šie perpendikuli krustojas vienā punktā.

3. Skaitļu virkni a_0, a_1, a_2, ... veido sekojoši:

$$a_0=1,\ a_1=1,\ a_{n+2}=7a_{n+1}-a_n-2 \text{ pie } n\geq 0.$$

Pierādīt, ka visi virknes locekļi ir naturālu skaitļu kvadrāti.

4. Dots, ka a un b ir naturāli skaitļi, bet p – pirmskaitlis, kas dod atlikumu 2, dalot ar 3. Dots, ka a^2+ab+b^2 dalās ar p. Pierādīt, ka gan a, gan b dalās ar p.

5. Dotas 20 monētas. Tās var būt gan īstas (to masa ir starp 11 g un 11,1 g ieskaitot), gan viltotas (to masa ir starp 10,6 g un 10,7 g ieskaitot). Dažādām īstām un dažādām viltotām monētām masas var atšķirties. Ar vienu jautājumu var norādīt uz jebkuru monētu kopu un uzzināt tās kopējo masu.

Izstrādājiet metodi, kas ļauj noskaidrot visu monētu dabu ar pēc iespējas mazāku jautājumu skaitu. (Jums nav jāpierāda, ka jūsu atrastais jautājumu skaits ir mazākais iespējamais.)

2004.gada 12. marts