9.1. Pierādāmo vienādību **ekvivalenti** pārveidojot, pakāpeniski iegūstam

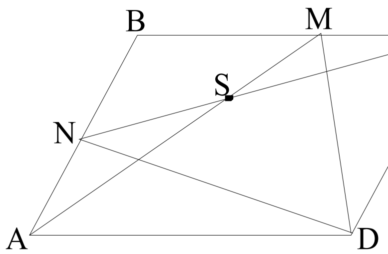
$$\frac{a+b+2c}{(a+c)(b+c)}=\frac{2}{a+b}$$

$$(a+b)(a+b+2c)=2(a+c)(b+c)$$

$$a^2+2ab+b^2+2ac+2bc=2ab+2ac+2bc+2c^2$$

$$a^2+b^2=2c^2$$

9.2.



1. zīm.

Trijstūriem AMD un CND katram laukums vienāds ar pusi no paralelograma laukuma. Tāpēc šajos vienlielajos trijstūros augstumi pret vienādām malām AM un CN ir vienādi savā starpā. Tāpēc D atrodas vienādos attālumos no $\angle$ASC malām.

9.3. a) jā; var uzrakstīt piecus skaitļus, kas dalās ar 6, un piecus skaitļus, kas dod atlikumu 1, dalot ar 6.

b) nē. Varam starp 11 skaitļiem atrast divus skaitļus ar vienādu paritāti; to summa dalās ar 2. Līdzīgi turpinot, varam atrast 5 dažādu skaitļu pārus, katram no kuriem summa dalās ar 2. Apskatām šīs 5 summas un aprēķinām to atlikumus, dalot ar 3. Ja sastopami visi atlikumi 0; 1; 2, tad atbilstošo skaitļu summa dalās ar 3. Ja kāds atlikums nav sastopams, tad kāds no atlikumiem sastopams vismaz 3 reizes; atkal atbilstošo skaitļu summa dalās ar 3.

Atliek ievērot, ka summa, kas dalās gan ar 2, gan ar 3, dalās ar 6.

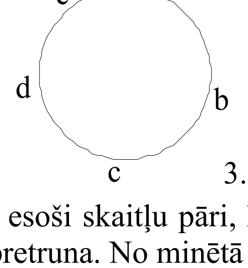
9.4. a) var uzlikt 15 torņus; skat., piem., 2. zīm.

1	**6**	**2**	
15	**14**	**13**	**12**
11	**10**	**9**	**8**
3	**4**	**7**	**5**

2. zīm.

b) ja uzliktu 16 torņus, tad tie būtu jānovieto arī visās stūra rūtiņās. Bet to torni, kuru ievieto **pēdējā stūra rūtiņā**, uzlikšanas brīdī apdraud divi citi – pretruna.

9.5. Vispirms pierādīsim, ka no summām a+b, b+c, c+d, d+e, e+a ne vairāk kā divas ir negatīvas (skat. 3. zīm.).



3. zīm.

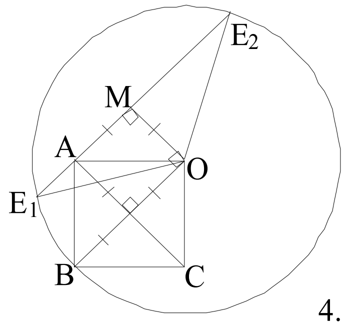
Ja tā nebūtu, tad atrastos divi blakus esoši skaitļu pāri, kuru summas ir negatīvas, piemēram, a+b<0 un c+d<0. Tad e=1-(a+b)-(c+d)>1 – pretruna. No minētā izriet: ja virknē

(*) a+b, b+c, c+d, d+e, e+a

ir divas negatīvas summas, tad tās šajā virknē atrodas blakus (uzskatām, ka a+b un e+a arī ir blakus). Tāpēc (*) noteikti ir 3 pēc kārtas ņemtas nenegatīvas summas. Varam pieņemt, ka $a+b\geq 0$, $b+c\geq 0$, $c+d\geq 0$. Ja $d+e<0$, tad $a+b+c=1-(d+e)>0$, un varam ņemt $x=a$, $y=b$, $z=c$. Līdzīgi analizē gadījumu, ja $e+a<0$. Ja turpretī visas summas no (*) ir nenegatīvas, tad arī $(a+b)+...+(e+a)\geq 0$ jeb $2(a+b+c+d+e)\geq 0$, tātad $a+b+c+d+e\geq 0$. Tad nevar būt, ka visas summas $a+b+c$, $b+c+d$, ..., $e+a+b$ ir negatīvas, jo to summa ir $3(a+b+c+d+e)$. Ja, piemēram, $a+b+c\geq 0$, varam ņemt $x=a$, $y=b$, $z=c$.

10.1. Ievērojam, ka $a+b+c-abc=a(1-bc)+b+c\leq 1-bc+b+c$. Mums pietiek pierādīt, ka $1-bc+b+c\leq 2$. Bet šī nevienādība ekvivalenta ar $1-b-c+bc\geq 0$ jeb $(1-b)(1-c)\geq 0$, kas ir acīmredzams.

10.2.



4. zīm.

Novelkam $OM\perp AE_1$. Tad $OM=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}OE_1$, tāpēc $\angle ME_1O=30°$ un $\angle E_1OM=60°$. Tāpēc $\angle AOE_1=60°-45°=15°$. Skaidrs, ka $\angle E_2OM=\angle E_1OM=60°$, tāpēc $\angle AOE_2=60°+45°=105°$.

10.3. Ja viens no uzrakstītajiem pirmskaitļiem būtu 2, tad citi būtu nepāra; tāpēc v.a. nebūtu vesels skaitlis. Tāpēc 2 uz tāfeles nav.

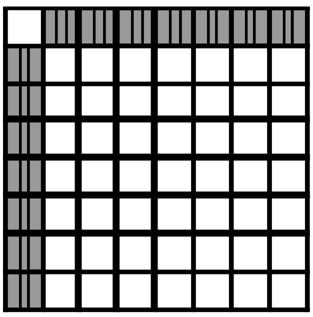
Apzīmēsim maksimālo uz tāfeles esošo pirmskaitli ar p. Skaidrs, ka $p>27$. Uzrakstīsim uz tāfeles visus trūkstošos pirmskaitļus, kas mazāki par 27, un nodzēsīsim visus uz tās esošos pirmskaitļus, kas lielāki par 27, izņemot p. No tā uz tāfeles esošo skaitļu v.a. samazināsies. Tāpēc rezultātā

$$\frac{3+5+7+11+13+17+19+23+p}{9}\leq 27$$

No šejienes $p\leq 145$. Lielākais pirmskaitlis, kas nepārsniedz 145, ir 139; tātad $p\leq 139$.

Pirmskaitlis 139 var būt uzrakstīts uz tāfeles, uzrakstot tur, piemēram, skaitļus 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 29; 139; šo skaitļu v.a. ir 27.

10.4. Kā redzams 5. zīm., n=14 vēl neder.



5. zīm.

Pierādīsim, ka n=15 der. Pieņemsim, ka triju nokrāsoto rūtiņu ar uzdevumā minēto īpašību nav. Sauksim rindu/kolonnu par bagātu, ja tajā ir vismaz 2 nokrāsotas rūtiņas, un par nabagu pretējā gadījumā.

Ja vai nu nav bagātu kolonnu, vai arī nav bagātu rindu, tad nokrāsoto rūtiņu nav vairāk par 8. Pieņemsim, ka ir gan bagāta kolonna, gan bagāta rinda; tad ne nabago kolonnu, ne nabago rindu nav vairāk par 7. Skaidrs, ka katra nokrāsotā rūtiņa ir vai nu nabagā rindā, vai nabagā kolonnā, tātad to nav vairāk par 7+7=14.

10.5. Jā, var. Sadalām visas monētas 49 pāros. Pirmajā svēršanā salīdzinām savā starpā 1.pāra monētas.

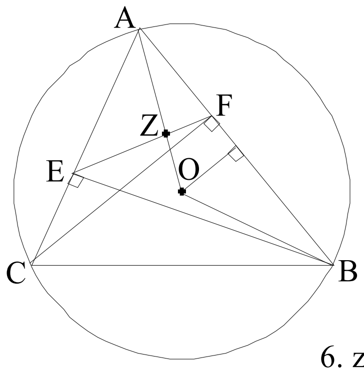
A Svari nav līdzsvarā. Tad viena monēta ir viltota, viena īsta. Turpmāk salīdzinām šo pāri ar 2., 3., ..., 49. pāri. Katras svēršanas rezultātā uzzinām, vai kārtējā pārī ir 0, 1 vai 2 viltotas monētas. Kopā patērējām 49 svēršanas.

B Svari ir līdzsvarā. Turpmāk salīdzinām 1.pāri pēc kārtas ar 2., 3., ... Jāatrodas tādam n, ka 1.pāra masa vienāda ar 2., 3., ..., (n-1)-ā pāra masu, bet atšķiras no n-tā pāra masas. Tad ar nākošo svēršanu salīdzinām n-tā pāra monētas savā starpā. Abu pēdējo svēršanu rezultātā zinām, cik viltoto un cik īsto monētu ir pirmajos n pāros. Ievērojam, ka mūsu rīcībā ir arī vismaz viena garantēti īsta un vismaz viena garantēti viltota monēta no jau svērtajām. Izveidojam no tām jaunu pāri un tālāk salīdzinām to ar (n+1)-o, (n+2)-o, ..., 49. pāri (ja n≠49). Kopā patērētas 1+(n-1)+1+(49-n)=50 svēršanas.

11.1. $(x+y)(1+xy) \geq 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{1 \cdot xy} = 4xy$ saskaņā ar nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

11.2. Pieņemsim, ka $a^2+3ab+b^2=n^2$. Tā kā $(3k+1)^2=9k^2+6k+1$ un $(3k+2)^2=9k^2+12k+4$, secinām: ja ne a, ne b nedalās ar 3, tad kreisā puse dod atlikumu 2, dalot ar 3. Bet n^2 vai nu dalās ar 3, vai dod atlikumu 1, dalot ar 3; tāpēc vai nu a, vai b dalās ar 3. Varam pieņemt, ka a=3. Iegūstam $b^2+9b+9=n^2$, ko pārveidojam par $4b^2+36b+36=4n^2$, $(2b+9)^2-45=(2n)^2$ un (2b-2n+9)(2b+2n+9)=45. Tā kā b un n – naturāli skaitļi, tad vai nu 2b-2n+9=1 un 2b+2n+9=45 (tad b=7, n=11), vai 2b-2n+9=3 un 2b+2n+9=15 (tad b=0 – neder), vai arī 2b-2n+9=5 un 2b+2n+9=9 (tad b<0 – neder). Tātad a=3, b=7. Simetrijas pēc der arī atbilde a=7, b=3.

11.3.



6. zīm.

Punkts O atrodas ABC iekšpusē. No ievilktu/centra leņķu īpašībām ∠AOB=2∠C, tāpēc no vienādsānu ΔAOB ∠OAB=90°-∠C. Ap CEFB var apvilkt riņķa līniju (jo ∠CEB=∠CFB=90°), tāpēc ∠AFE=180°-∠EFB=∠C. No tā seko, ka ∠AZF=90°.

11.4. Ja mainīgos x, y, z cikliski maina vietām, sistēma nemainās. Tātad: ja (p, q, r) ir tās atrisinājums, tad arī (r, p, q) un (q, r, p) ir atrisinājumi. Tātad, lai sistēmai būtu tikai viens atrisinājums, jābūt p=q=r, t.i., mēs varam risināt vienādojumu $x^2-2ax+1=0$. Tam ir viens atrisinājums, ja a=±1.

Tagad jāpārbauda, vai šīs vērtības tiešām der. Apskatām a=1. Saskaitot visus vienādojumus, iegūstam

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0,$$

no kurienes x=y=z=1; pārbaude parāda, ka tas tiešām ir atrisinājums. Tātad a=1 der. Līdzīgi pierāda, ka der a=-1.

11.5. Jā, var. Izmantosim matemātisko indukciju pēc k.

Bāze k=4. Apskatām 4 šķīvjus, uz kuriem kopā atrodas visas konfektes. Pārveidojumu virkne

$$(1, 1, 1, 1)\rightarrow (3, 1, 0, 0)\rightarrow (2, 0, 2, 0)\rightarrow (1, 0, 1, 2)\rightarrow (0, 0, 0, 4)$$

ietver sevī visus principiāli dažādos konfekšu sadalījumus un parāda, ka mērķis ir sasniedzams.

Pieņemsim, ka apgalvojums pierādīts patvaļīgam $n\geq 4$ un kopējam konfekšu skaitam 4, 5, ..., m. Apskatām m+1 konfekti. Vispirms ignorējam vienu konfekti un savācam pārējās uz šķīvja S. Ja ignorētā konfekte arī ir uz S, viss kārtībā. Pretējā gadījumā mums ir šķīvis ar m konfektēm, šķīvis ar 1 konfekti un vēl vismaz 2 tukši šķīvji. Mērķis sasniedzams šādi:

$$(1, m, 0, 0)\rightarrow (0, m-1, 2, 0)\rightarrow (0, m-2, 1, 2)\rightarrow (2, m-3, 0, 2)\rightarrow (1, m-1, 0, 1)\rightarrow (0, m+1, 0, 0).$$

12.1. Apzīmēsim leņķus, ko OA un OB veido ar Ox ass pozitīvo virzienu, attiecīgi ar α un β. Apskatāmo trapeču laukumu summa ir

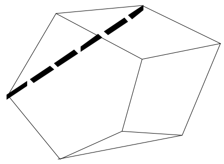
$$\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}\cdot(\sin\alpha-\sin\beta)+\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}\cdot(\cos\beta-\cos\alpha)=\cos\beta\sin\alpha-\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha-\beta)$$

Leņķis α - β ir centra leņķis lokam, ko savelk horda AB. Hordas garumam nemainoties, nemainās arī loka leņķiskais lielums. No šejienes seko uzdevuma apgalvojums.

12.2. Ievērojam, ka uz 3 jautājumiem ir 8 dažādas atbilžu "jā" un "nē" kombinācijas. Tā kā pie n = 9 jāšķiro 9 situācijas, prasītais nav panākams. Pie n = 8 Andris **var** noskaidrot iedomāto skaitli, kā tas redzams sekojošā tabulā.

A \ x	1	2	3	4	5	6	7	8
1, 2, 7, 8	+	+	-	-	-	-	+	+
1, 3, 6, 8	+	-	+	-	-	+	-	+
1, 4, 6, 7	+	-	-	+	-	+	+	-

12.3. Vienīgais daudzskaldnis ar 4 skaldnēm (tetraedrs) neapmierina uzdevuma prasības. Apskatām daudzskaldņus ar ≥ 5 skaldnēm. Vienai skaldnei jābūt ≥ 5 malām, tātad šai skaldnei ir vismaz 5 kaimiņu skaldnes, un kopā skaldņu ir ≥ 6. Tāpēc ir vismaz 2 skaldnes, katra ar ≥ 5 malām. Šīm skaldnēm ir ne vairāk kā 2 kopīgas virsotnes; tāpēc virsotņu vispār ir ≥ 8. Daudzskaldni ar 8 virsotnēm skat. 7.zīm.



7. zīm.

12.4. Piemērs 0; 2; 3; 4; 6 parāda, ka var būt n = 5. Pierādīsim, ka $n\geq 6$ nav iespējams.

Apskatāmās skaitļu kopas īpašības saglabājas, ja tiem visiem pieskaita vienu un to pašu konstanti vai visus reizina ar vienu un to pašu nenulles skaitli. Tāpēc varam pieņemt, ka mazākais skaitlis ir 0, bet lielākais 1. Tad viens no skaitļiem noteikti ir $\frac{1}{2}$. Apzīmēsim ar A to uzrakstīto skaitļu kopu, kas ir starp $\frac{1}{2}$ un 1. Pieņemsim no pretējā, ka A satur kādu skaitli, kas atšķiras no $\frac{2}{3}$. Apzīmēsim ar a to no šādiem A elementiem, kas ir vistuvākais skaitlim $\frac{2}{3}$.

Tā kā a>$\frac{1}{2}$, tad no skaitļiem 0 un a iegūstam, ka jābūt uzrakstītam arī $\frac{a}{2}$, un $\frac{a}{2}<\frac{1}{2}$. No skaitļiem $\frac{a}{2}$ un 1 iegūstam, ka jābūt uzrakstītam arī $b=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+1\right)=\frac{a+2}{4}$. Ievērojam, ka b>$\frac{1}{2}$ un $\left|b-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{a+2}{4}-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{4}\left|a-\frac{2}{3}\right|$, kas ir pretrunā ar a izvēli. Tātad kopa A satur augstākais vienu skaitli. Līdzīgi pierāda, ka uzrakstīts augstākais viens skaitlis starp 0 un $\frac{1}{2}$. Vajadzīgais pierādīts.

12.5. Tā kā $2\cdot(3a+2b)^2-(4a+3b)^2=2a^2-b^2$, tad katram naturālam n pastāv vienādība

$$2\cdot x_n^2-y_n^2=2\cdot 3^2-4^2=2.$$

Lai uzdevums būtu atrisināts, jāpierāda, ka vienādojumam $2x^2-z^6=2$ nav atrisinājuma naturālos skaitļos (te $y = z^3$).

Ja $2x^2-z^6=2$, tad $z = 2t$ un $2x^2-64t^6=2$, $x^2-32t^6=1$, no kurienes $\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x+1}{2}=(2t)^3$.

Skaidrs, ka x jābūt nepāra skaitlim. Apzīmējot $\frac{x-1}{2}=u$, iegūstam $u(u+1)=(2t)^3$. Tā kā $\text{LKD}(u,u+1)=1$, gan u, gan u+1 jābūt naturālu skaitļu kubiem. Bet nav tādu divu naturālu skaitļu kubu, kuru starpība ir 1.