Latvijas 55.matemātikas olimpiādes

4.kārtas uzdevumi

1. Aplūkojam virknes, kas sastāv no burtiem *a* un *b*. Ar vienu gājienu drīkst viens otram sekojošu burtu grupu *aba* aizstāt ar *b* vai arī burtu *b* aizstāt ar burtu grupu *aba*; tāpat drīkst *bba* aizstāt ar *a* vai arī *a* aizstāt ar *bba*.

Vai, atkārtojot šādus gājienus, no burtu virknes $b\underbrace{aa...a}_{2005}$ var iegūt virkni $\underbrace{aa...a}_{2005}b$?

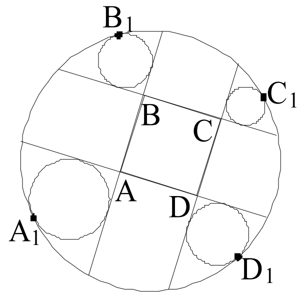
2. Kādi pozitīvi reāli skaitļi *a*, *b*, *c* apmierina nevienādību sistēmu

$$4(ab+bc+ca)-1 \geq a^2+b^2+c^2 \geq 3(a^3+b^3+c^3) \ ?$$

3. Atrast visas naturālu skaitļu kopas S, kas vienlaicīgi apmierina sekojošas īpašības:

- S satur vismaz 3 elementus,
- ja $n \in S$ un *k* ir skaitļa *n* naturāls dalītājs, tad arī $k \in S$,
- ja $a \in S$, $b \in S$ un $1<a<b$, tad $1+ab \in S$.

4. Kvadrāts ABCD atrodas riņķa līnijas *w* iekšpusē. Tā malas pagarinātas, un iegūtajos „līklīniju trijstūros" ievilktas riņķa līnijas, kas pieskaras *w* attiecīgi punktos A_1, B_1, C_1, D_1 (skat. 1. zīm.). Pierādīt, ka taisnes AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 krustojas vienā punktā.



1. zīm.

5. Karnevāla zālē karājas *n* lampas. Dažas no tām savienotas ar vītnēm; katra vītne savieno 2 dažādas lampas un nepieskaras citām lampām. Pavisam ir $n+4$ vītnes.

Pierādīt, ka dažas vītnes var nokrāsot baltas, bet dažas – sarkanas (katru vītni augstākais vienā krāsā) tā, ka visas baltās vītnes veido noslēgtu gredzenu un visas sarkanās vītnes – arī.

(Dažas vītnes varbūt paliek nenokrāsotas.)