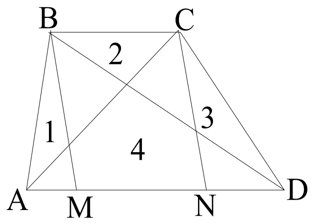
Latvijas 55. matemātikas olimpiādes
3. kārtas uzdevumi

9. klase

1. Uz trapeces ABCD garākā pamata AD ņemti tādi divi iekšēji punkti M un N, ka BM||CN. Pierādīt, ka daļu 1, 2 un 3 laukumu summa vienāda ar daļas 4 laukumu (skat. 1.zīm.).



1. zīm.

2. Dots, ka B – naturāls skaitlis, A=7·B un A ciparu summa divas reizes lielāka par B ciparu summu. Skaitli C iegūst, pierakstot skaitlim A galā skaitli B.

a) atrast kaut vienu šādu C,
b) pierādīt, ka šādu C ir bezgalīgi daudz,
c) pierādīt, ka katrs šāds C dalās ar 9,
d) vai C noteikti dalās ar 27?

3. Ap galdu sēž 8 bērni. Katriem trīs pēc kārtas sēdošiem bērniem kopā ir nepāra skaits konfekšu. Pierādīt, ka katram bērnam ir vismaz viena konfekte.

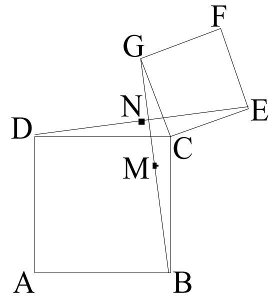
4. Dots, ka a un b – tādi reāli skaitļi, ka $a+b$ ir vesels skaitlis un $a^2+b^2=2$. Atrast visus šādus a un b pārus un pierādīt, ka citu bez Jūsu atrastajiem nav.

5. Katrs naturāls skaitlis no 1 līdz 2005 ieskaitot nokrāsots vienā no n krāsām. Ir zināms: ja a, b un c ir dažādi skaitļi, a dalās ar b un b dalās ar c, tad a, b un c nav visi nokrāsoti vienā un tai pašā krāsā.

Atrast mazāko iespējamo n vērtību.

10. klase

1. Dots, ka ABCD un CEFG ir kvadrāti, M ir BG viduspunkts un N ir DE viduspunkts (skat. 2. zīm.). Pierādīt, ka nogriežņi CM un CN ir savā starpā vienādi un perpendikulāri.



2. zīm.

2. Dots, ka x, y, z un t ir reāli skaitļi, no kuriem neviens nav 0. Zināms, ka $x+y+z=t$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{t}$ un $x^3+y^3+z^3=1000^3$.

a) atrast kaut vienu šādu x, y, z, t komplektu,
b) aprēķināt $x+y+z+t$.

3. Kādām funkcijām f vienlaicīgi piemīt sekojošas īpašības:

a) f definīcijas apgabals ir {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10},
b) f vērtības ir naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 100,
c) f ir augoša funkcija,
d) visiem x un y no definīcijas apgabala skaitlis $x\cdot f(x)+y\cdot f(y)$ dalās ar $x+y$?

4. Uz riņķa līnijas w ar centru O izvēlēti divi punkti A un B tā, ka AB nav diametrs. Uz trijstūrim OAB apvilktās riņķa līnijas izvēlēts punkts C, kas nesakrīt ne ar A, ne ar B. Taisne AC krusto w punktos A un D. Pierādiet, ka DCB ir vienādsānu trijstūris.

5. Kādā universitātē strādā n profesori, $n\geq 2$. Katrs profesors lasa lekcijas. Daži no viņiem klausās citu profesoru lekcijas. Ir zināms, ka

- neviens neklausās savas lekcijas,
- ja A klausās B lekcijas, tad B neklausās A lekcijas,
- ja A ir profesors un B ir profesors, tad var atrast tādu profesoru C, kas klausās gan A lekcijas, gan B lekcijas.

a) Pierādiet: var gadīties, ka $n=7$.
b) Kādas vēl var būt n vērtības?

11. klase

Latvijas 55. matemātikas olimpiādes
3. kārtas uzdevumi

1. Ar $\{x\}$ apzīmē starpību starp x un lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x. Piemēram, $\{1{,}6\}=0{,}6$; $\{3\}=0$, $\{-0{,}8\}=0{,}2$.

a) atrast kaut vienu tādu racionālu skaitli x, ka $\{x^2\}+\{x\}=0{,}99$,

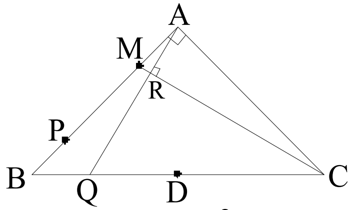
b) pierādīt, ka šādu racionālu x ir bezgalīgi daudz.

2. Dots, ka ABC ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris, AB=AC. Uz AB ņemti tādi iekšēji punkti P un M, ka AM=BP. Ar D apzīmējam BC viduspunktu. Punkts R atrodas uz CM un punkts Q atrodas uz BC. Ir zināms, ka A, R, Q ir uz vienas taisnes un AQ⊥CM (skat. 3. zīm.).

Pierādīt, ka

a) $\angle AQC=\angle PQB$;

b) $\angle DRQ=45°$.



3. zīm.

3. Kādām a vērtībām vienādojumam

$$4^x-(a^2+3a-2)\cdot 2^x+3a^3-2a^2=0$$

ir viens vienīgs atrisinājums reālos skaitļos?

4. Dots, ka p – pirmskaitlis. Pierādīt, ka apgalvojumi „eksistē tāds vesels x, ka x^2+x+3 dalās ar p" un „eksistē tāds vesels y, ka y^2+y+25 dalās ar p" vai nu abi ir pareizi, vai abi – nepareizi.

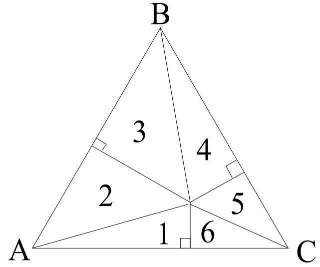
5. Apskatām kubu, kura divās virsotnēs ierakstīts 1, bet citās virsotnēs ierakstītas nulles. Ar vienu gājienu var izvēlēties vienu virsotni X un pieskaitīt vieniniekus skaitļiem tajās 3 virsotnēs, ko ar X savieno šķautne. Atkārtojot šādus gājienus, jāpanāk, lai skaitļi visās kuba virsotnēs kļūtu vienādi. Kuriem sākotnējiem vieninieku izvietojumiem to var izdarīt?

12.klase

1. Dots, ka x un y ir reāli skaitļi, $3^x+13^y=17^x$ un $5^x+7^y=11^y$. Pierādīt, ka $x<y$.

2. No punkta regulāra trijstūra ABC iekšpusē vilkti perpendikuli pret tā malām. Šis punkts savienots arī ar trijstūra virsotnēm. Iegūtajos 6 taisnleņķa trijstūros ievilktas riņķa līnijas. Apzīmēsim i-tajā trijstūrī ievilktās riņķa līnijas rādiusu ar r_i (skat. 4. zīm.).

Pierādīt, ka $r_1+r_3+r_5=r_2+r_4+r_6$.



4. zīm.

3. Pa riņķa līniju izrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz n ieskaitot, katrs vienu reizi. Katriem diviem blakus uzrakstītiem skaitļiem atrodam to starpības absolūto vērtību. Atrast šo absolūto vērtību summas mazāko un lielāko iespējamo vērtību.

4. Par skaitļu virkni x_1, x_2, x_3, ... zināms, ka

- $x_1=1$
- $x_{2n}=1+x_n$ visiem naturāliem n
- $x_{2n+1}=\dfrac{1}{x_{2n}}$ visiem naturāliem n.

a) Pierādiet, ka visi virknes locekļi ir dažādi.

b) Kuri skaitļi ir šīs virknes locekļi?

5. Katra no regulāra 1000-stūra virsotnēm nokrāsota balta, sarkana vai zaļa. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties divas blakus esošas virsotnes, kas nokrāsotas dažādās krāsās, un pārkrāsot tās abas trešajā krāsā. Pierādiet, ka

- var panākt, lai visas virsotnes būtu nokrāsotas vienā un tai pašā krāsā,
- šī „beigu krāsa" viennozīmīgi atkarīga no sākotnējā krāsojuma.