Latvijas 56.matemātikas olimpiādes 4.kārtas uzdevumi

Risināšanas laiks - $4\frac{1}{2}$ astronomiskās stundas

1. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$3^x = 2^x \cdot y + 1$$

2. Dots, ka $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ ir reāli skaitļi un pastāv sakarība

$$(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2 - 1)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2 - 1) > (a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n - 1)^2.$$

Pierādīt, ka $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 > 1$.

3. Klubā ir 3n+1 dalībnieki. Katri divi savā starpā sarunājas tieši vienā no 3 valodām: angļu, vācu, franču. Katrs kluba dalībnieks katrā no šīm valodām sarunājas ar tieši n citiem.

Pierādīt: var atrast tādus trīs kluba dalībniekus, kas savstarpējā saziņā lieto visas trīs valodas.

4. Dots, ka ΔABC ir šaurleņķu. Tajā ievilktā riņķa līnija pieskaras malām AB un AC atbilstoši punktos D un E. Leņķu $\angle ACB$ un $\angle ABC$ bisektrises krusto taisni DE attiecīgi punktos X un Y. Malas BC viduspunkts ir Z. Pierādīt: ΔXYZ ir vienādmalu tad un tikai tad, ja $\angle A=60^o$.

5. Plaknē dota taisnleņķa koordinātu sistēma un atzīmēti n punkti. Pierādīt, ka var nokrāsot dažus no šiem punktiem baltus, bet pārējos – sarkanus tā, ka uz katras taisnes, kas paralēla kādai no koordinātu asīm, abu krāsu punktu daudzumi atšķiras viens no otra ne vairāk kā par 1.