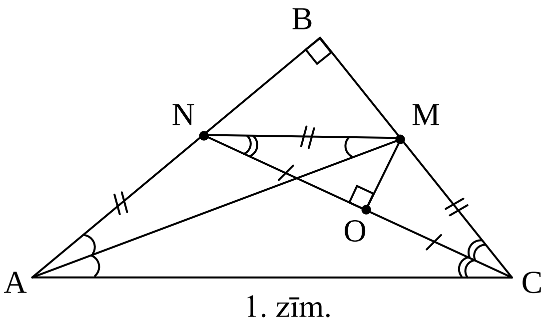
9.1. Saskaņā ar Vjeta teorēmu $x_1 + x_2 = a^2$ un $x_1x_2 = b^2$.

Pieņemsim, ka eksistē divi dažādi naturāli skaitļi y_1 un y_2, kuriem būtu spēkā $x_1 = y_1^2$ un $x_2 = y_2^2$. Tad $b^2 = y_1^2y_2^2 = (y_1y_2)^2$, tātad $b = y_1y_2$ ir naturāls skaitlis pie visām naturālām y_1 un y_2 vērtībām; $y_1^2+y_1^2 = a^2$. Izvēloties, piem., y_1=3 un y_2=4, tātad a=5, iegūstam vienādojumu x^2-5^2x+12^2=0, kura saknes ir 3^2 un 4^2.

9.2. Ja caur punktiem B, M, O un N var novilkt riņķa līniju, tad $\angle NBM + \angle NOM = 180°$ un $\angle NOM = 90°$ (skat. 1. zīm.). Tā kā OM ΔNMC ir gan augstums, gan mediāna, tad ΔNMC ir vienādsānu trijstūris. CN ir bisektrise, tātad $\angle ACN = \angle NCM = \angle CNM$. No tā seko, ka $AC \parallel MN$. Tad $\angle CAM = \angle NAM = \angle AMN$, tātad ΔMNA ir vienādsānu trijstūris. Iegūstam, ka $AN = MN = MC$ un ANMC ir vienādsānu trapece, tāpēc $\angle NAC = \angle MCA$. Tā kā ΔABC ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris, tad $\angle BAC = \angle NAC = 45°$.

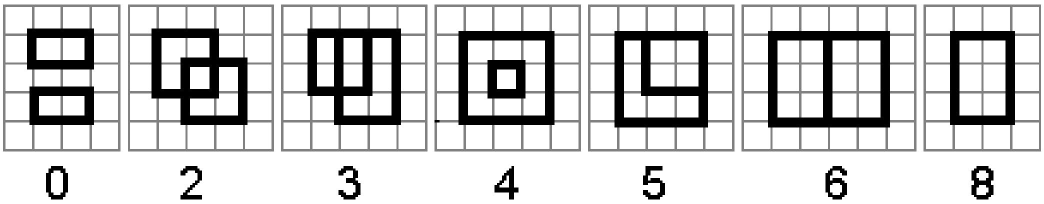


1. zīm.

9.3. Aplūkosim 11 tādus pēc kārtas sekojošus naturālus skaitļus no k līdz $k+10$ (ieskaitot), ka skaitļa k pēdējais cipars ir 1. Skaitlis k beidzas ar 1 un dalās ar 1; $k+4$ beidzas ar 5 – tātad dalās ar 5; skaitlis $k+10$ arī beidzas ar 1. Tātad, skaitļi k, $k+4$ un $k+10$ nav skaisti. Starp k un $k+4$ ir 3 skaitļi; starp $k+4$ un $k+10$ ir 5 skaitļi. Tāpēc nevar būt vairāk nekā 5 pēc kārtas sekojoši *skaisti* skaitļi.

Piemēram, skaitļi 866, 867, 868, 869, 870 visi ir *skaisti*, tātad var būt 5 pēc kārtas sekojoši *skaisti* skaitļi.

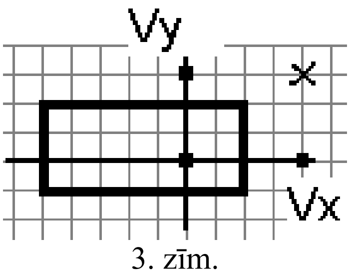
9.4. Atbilde: no astoņām divu taisnstūru virsotnēm vienlaicīgi otram arī taisnstūrim var piederēt 0, 2, 3, 4, 5, 6 vai 8 virsotnes, skat., piem., 2. zīm.



2. zīm.

Pierādījums. a) Pierādīsim, ka otram taisnstūrim nevar piederēt tieši viena virsotne.

Pieņemsim pretējo, ka šāda (*īpaša*) virsotne tomēr atrodas – tā ir vienīgā no astoņām virsotnēm, kas vienlaicīgi pieder arī otram taisnstūrim. Šī virsotne nevar sakrist ar kādu no otra taisnstūra virsotnēm, jo tad arī otra taisnstūra virsotnei, ar kuru sakrīt *īpašā* virsotne, būtu spēkā šī īpašība, t.i., būtu vismaz divas virsotnes ar minēto īpašību. Tātad *īpašā* virsotne var atrasties tikai otra taisnstūra iekšpusē vai arī uz kādas no tā malām. 3. zīmējumā ir parādīta situācija, kad *īpašā* virsotne ir otra taisnstūra iekšpusē.



3. zīm.

Aplūkosim, kur var atrasties tās divas virsotnes, kurām ar *īpašo* virsotni ir kopīga mala. Vienai virsotnei (V_x) jāatrodas uz tās pašas horizontāles, uz kuras atrodas īpašā virsotne. V_x nevar atrasties otra taisnstūra iekšpusē vai uz tā malas, jo tad arī V_x būtu ar meklēto īpašību. Citai virsotnei (V_y) jāatrodas uz tās pašas vertikāles, uz kuras atrodas īpašā virsotne. V_y nevar atrasties otra taisnstūra iekšpusē vai uz tā malas, jo tad arī V_y būtu ar minēto īpašību. Tātad gan V_x, gan V_y atrodas ārpus otra taisnstūra. Bet tādā gadījumā pirmā taisnstūra (kura trīs virsotnes ir *īpašā* virsotne, V_x un V_y) iekšpusē atrodas kāda no otrā taisnstūra virsotnēm.

Līdzīgi analizē gadījumu, kad *īpašā* virsotne atrodas uz otra taisnstūra kontūra.

Esam ieguvuši pretrunu, tātad nevar būt tieši viena virsotne, kas pieder arī otram taisnstūrim.

b) Pierādīsim, ka otram taisnstūrim nevar piederēt tieši septiņas virsotnes.

Ieviesīsim koordinātu sistēmu un apskatīsim doto taisnstūru virsotņu koordinātes. Pieņemsim, ka viena taisnstūra ABCD virsotnes ir ar koordinātām $A(x_{11};y_{11})$, $B(x_{11};y_{12})$, $C(x_{12};y_{12})$ un $D(x_{12};y_{11})$; un ir spēkā sakarības $x_{11}<x_{12}$ un $y_{11}<y_{12}$, bet otra taisnstūra (KLMN) virsotnes ir ar koordinātām $K(x_{21};y_{21})$, $L(x_{21};y_{22})$, $M(x_{22};y_{22})$ un $N(x_{22};y_{21})$.

Pieņemsim pretējo –ir iespējams divus taisnstūrus novietot tā, ka tieši septiņas no astoņām virsotnēm vienlaikus pieder arī otram taisnstūrim. Šis apgalvojums ir līdzvērtīgs apgalvojumam, ka var novietot divus taisnstūrus tā, ka **tieši viena** no astoņām virsotnēm **nepieder** otram taisnstūrim. Varam pieņemt, ka šī vienīgā „nepiederošā" virsotne ir virsotne $M(x_{22};y_{22})$.

Tātad virsotņu koordinātas vienlaicīgi saista šādas sakarības:

$x_{11}\le x_{21}\le x_{12}$ un $y_{11}\le y_{21}\le y_{12}$ (jo $K(x_{21};y_{21})$ pieder taisnstūrim ABCD) **(1)**

$x_{11}\le x_{21}\le x_{12}$ un $y_{11}\le y_{22}\le y_{12}$ (jo $L(x_{21};y_{22})$ pieder taisnstūrim ABCD) **(2)**

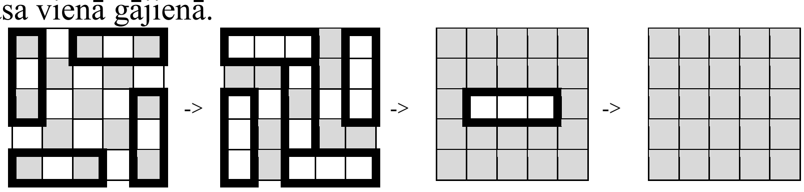
$x_{11}\le x_{22}\le x_{12}$ un $y_{11}\le y_{21}\le y_{12}$ (jo $N(x_{22};y_{21})$ pieder taisnstūrim ABCD) **(3)**

Bet no (2) un (3) nosacījumiem seko, ka vienlaicīgi

$$x_{11}\le x_{22}\le x_{12} \text{ un } y_{11}\le y_{22}\le y_{12},$$

tātad arī virsotne $M(x_{22};y_{22})$ pieder taisnstūrim ABCD. Esam ieguvuši pretrunu, tātad pieņēmums, ka tieši viena virsotne nepieder otram taisnstūrim, ir aplams, tāpēc tieši septiņas no astoņām abu taisnstūru virsotnēm nevar vienlaikus piederēt arī otram taisnstūrim.

9.5. a) Tā kā galarezultātu nosaka tikai tas, cik reizes katrai rūtiņai ir mainīta krāsa, nav svarīgi, kādā secībā gājieni tiek izdarīti. 4. zīm. parādīts piemērs, kurā ar treknāku līniju apvilktas rūtiņas, kurām tiek mainīta krāsa vienā gājienā.



4. zīm.

b) Katrā rūtiņā ierakstīsim skaitli 1 vai 2 kā redzams 5. zīmējumā:

1	1	2	1	1
2	1	1	2	1
1	2	1	1	2

5. zīm.

Sākumā skaitļu summa pelēkajās rūtiņās ir 11. Pilnībā baltam laukumam (nav nevienas pelēkās rūtiņas) tā ir 0, bet pilnībā pelēkam laukumam tā ir vienāda ar visus ierakstīto skaitļu summu, t.i. 20. Mainot krāsojumu jebkurās trīs secīgās rūtiņās, skaitļu kopsumma iekrāsotajās rūtiņās mainās (palielinās, samazinās vai nemainās, t.i., izmainās par 0) par pāra skaitli: (1+1)-2=0; (1+2)-1=2. Tā kā no nepāra skaitļa 11, tam pieskaitot vai atņemot pāra skaitļus, nevar iegūt pāra skaitli, uzdevuma prasības izpildīt nav iespējams.

10.1. Apzīmēsim $b+c-a=2x$, $a+c-b=2y$ un $a+b-c=2z$, tātad $a=y+z$, $b=x+z$ un $c=x+y$. Tā kā a, b, c ir trijstūra malu garumi, tad x, y, z ir pozitīvi skaitļi. Lietojot ieviestos apzīmējumus, doto nevienādību var pārrakstīt:

$$\frac{y+z}{2x}+\frac{x+z}{2y}+\frac{x+y}{2z}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)\right)\geq 3 \quad \textbf{(1)}$$

Ievērosim, ka patvaļīgiem pozitīviem skaitļiem x un y ir spēkā nevienādība $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ (*):

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2 \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{xy}\geq 2 \Rightarrow x^2+y^2-2xy=(x-y)^2\geq 0\,.$$

Pielietojot katrai iekavai pierādāmajā nevienādībā (1) nevienādību (*), iegūstam

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)\right)\geq \frac{1}{2}\left(2+2+2\right)=3\,.$$

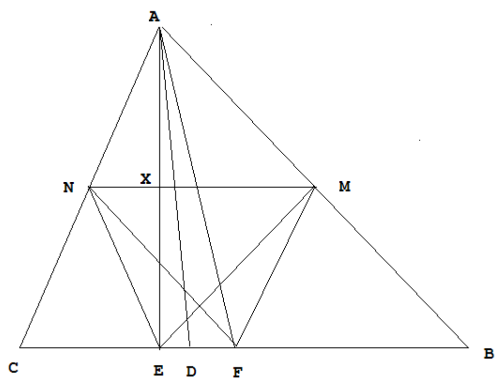
Nevienādība (1) ir patiesa, tātad patiesa ir arī dotā nevienādība.

10.2. Apzīmējam kopējo vērtību ar x. Tad $a_1-a_2=\mp x$, $a_2-a_3=\mp\frac{x}{2}$, ..., $a_{20}-a_1=\mp\frac{x}{20}$. Saskaitot $x\left(\mp 1\mp\frac{1}{2}\mp\ldots\mp\frac{1}{20}\right)=0$. Ja $x\neq 0$, tad iekava ir 0. Izsakot to kā racionālu skaitli ar mazāko iespējamo saucēju, saskaitāmajā $\frac{1}{19}$ skaitītājs nedalīsies ar 19, bet visos citos – dalīsies (jo 19 ir pirmskaitlis). Tāpēc kopējais skaitītājs ar 19 nedalīsies, un daļa būs nesaīsināma. Tāpēc tā nav vesels skaitlis, tāpēc nav arī 0. Pretruna, tāpēc $x=0$.

10.3. Ar E apzīmēsim no virsotnes A vilktā augstuma pamatu, ar F – malas BC viduspunktu. Pierādīsim, ka D atrodas starp E un F (vai ar tiem sakrīt, ja ABC ir vienādsānu trijstūris) (skat. 6. zīm.).

Ja AC=AB tad punkti E, D un F sakrīt. Ja malas ir dažādas, tad varam pieņemt, ka AC<AB (otru gadījumu analizē līdzīgi). Tā kā AD ir bisektrise, tad no bisektrišu īpašības seko, ka $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DB}}<1=\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FB}}$, tātad D ir pa kreisi (skat. 6.zīm.) no punkta F.

Lietojot Pitagora teorēmu, iegūstam $\frac{\mathrm{CE}^2}{\mathrm{EB}^2}=\frac{\mathrm{AC}^2-\mathrm{AE}^2}{\mathrm{AB}^2-\mathrm{AE}^2}<\frac{\mathrm{AC}^2}{\mathrm{AB}^2}$, tātad punkts E atrodas pa kreisi no punkta F.



6. zīm.

EM it taisnleņķa trijstūra AEB mediāna, tāpēc EM=AM=MB. Līdzīgi EN ir taisnleņķa trijstūra AEC mediāna, tāpēc EN=AN=NC. Tātad ΔANM=ΔENM (*mmm*), no kurienes seko, ka $\angle$NAM=$\angle$NEM. Tā kā N, M un F ir attiecīgi malu AC, AB un BC viduspunkti, tad ΔANM=ΔFMN (*mmm*), tāpēc $\angle$NAM=$\angle$NFM. Tātad $\angle$NEM=$\angle$NAM=$\angle$NFM, tāpēc caur punktiem E, N, M un F var novilkt riņķa līniju. Ja punkti E un F sakrīt (ABC vienādsānu) tad $\angle$NAM=$\angle$NDM. Ja E un F ir dažādi punkti, tad D atrodas riņķa iekšpusē uz hordas EF, tātad $\angle$NDM>$\angle$NEM=$\angle$NAM.

10.4. Mazākais iespējamais dienu skaits festivālā ir 5.

Apzīmējam mūziķus ar 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, tad viens iespējams uzstāšanos grafiks, piemēram, ir:

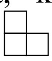
1. diena: 1, 2, 3, 4.
2. diena: 1, 5, 6, 7.

3. diena: 2, 5, 6, 7.
4. diena: 3, 5, 6, 7.
5. diena: 4, 5, 6, 7.

Pierādīsim, ka ar 4 dienām nepietiek. Ja festivālā ir 4 dienas, tad kopā ir 4·4=16 uzstāšanās. Tas nozīmē, ka kāds mūziķis uzstājies ne vairāk kā 2 dienās. Pieņemsim, ka tas ir mūziķis 1. Lai 1 būtu uzstājies kopā ar katru citu mūziķi, nepieciešams, lai viņš vienā dienā muzicē kopā ar vieniem trīs mūziķiem (piemēram, 2, 3 un 4) un otrā dienā - kopā ar trim pārējiem mūziķiem (5, 6 un 7).

Ir vēl 2 dienas, kad uzstājušies 2, 3, 4, 5, 6, 7 (kaut kādās kombinācijās). Vismaz viens no viņiem ir uzstājies tikai vienā no šīm divām dienām. Pieņemsim, ka tas ir 2. Lai viņš būtu uzstājies kopā ar katru citu mūziķi, nepieciešams, lai vienā dienā muzicētu kopā, piemēram, 2, 5, 6 un 7.

Ja atlikušajā dienā neuzstājas kāds no mūziķiem 3 vai 4, tad viņš nebūs muzicējis kopā ar 5, 6 un 7. Savukārt, ja atlikušajā dienā uzstājas gan 3, gan 4, tad noteikti neuzstājas viens no mūziķiem 5, 6, 7, tad šis mūziķis nav uzstājies kopā ar 3 un 4. Tāpēc ar 4 dienām nepietiek.

10.5. Pieņemsim, ka ir izdevies kvadrātu ar izmēriem 9×9 rūtiņas sagriezt uzdevumā prasītajās figūrās. Simetrijas dēļ var uzskatīt, ka šajā sadalījumā *stūrītis* ir orientēts tieši tā kā redzams zīmējumā: . (Ja tā nav, varam kvadrātu pagriezt ap centru tā, lai *stūrītis* nonāk šādā stāvoklī.) Izkrāsosim kvadrātu ar izmēriem 9×9 rūtiņas trīs krāsās, kā parādīts 7. zīmējumā.

1	2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3	1

7. zīm.

Katrā krāsā ir iekrāsots vienāds rūtiņu daudzums – pa 27 katrā krāsā. Katrs taisnstūris ar izmēriem 2×3 rūtiņas pārklāj tieši divas katras krāsas rūtiņas, tātad 13 šādi taisnstūri kopā pārklāj pa 26 katras krāsas rūtiņām. Tā kā *stūrītis* pārklāj divas vienas krāsas rūtiņas, tad prasītais sadalījums neeksistē.

11.1. 1. risinājums:

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 =$$

$$= \frac{(a+b+c+d)^2}{8} - 3\frac{(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2}{8} \le 8.$$

2. risinājums:

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd - a^2 - b^2 - c^2 - d^2$$

$$= \frac{(a+b+c+d)^2}{2} - 3\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2} \le \frac{(a+b+c+d)^2}{2} - \frac{3(a+b+c+d)^2}{8} = 8,$$

kur otrajā solī izmantota nevienādība starp vidējo aritmētisko un vidējo kvadrātisko.

11.2. Izmantosim matemātisko indukciju, lai pierādītu, ka $a_i=i$, $i=1; 2; ...; n$.

Pie $n=1$ iegūstam $a_1^3 = a_1^2$, no kurienes $a_1=1$.

Pieņemsim, ka jau pierādīts, ka $a_i=i$ pie $i=1; 2; ...; k$. Apskatām vienādību

$$a_1^3 + ... + a_k^3 + a_{k+1}^3 = (a_1 + ... + a_k + a_{k+1})^2.$$

Atverot iekavas,

$$\left(a_1^3 + ... + a_k^3\right) + a_{k+1}^3 = (a_1 + ... + a_k)^2 + 2a_{k+1}(a_1 + ... + a_k) + a_{k+1}^2,$$

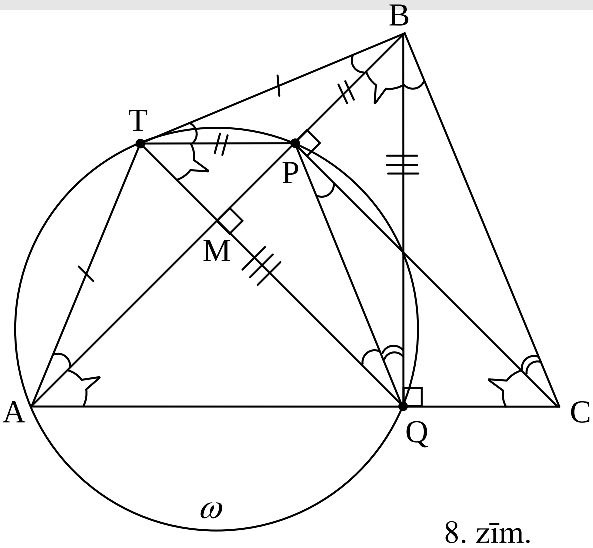
no kurienes, izmantojot doto, dalot ar a_{k+1} un izmantojot induktīvo hipotēzi,

$$a_{k+1}^2 - a_{k+1} - k(k+1) = 0.$$

Pēc Vjeta teorēmas vai nu $a_{k+1}=-k$, vai $a_{k+1}=k+1$. Tā kā virkne sastāv no pozitīviem skaitļiem, der tikai otrā iespēja.

11.3. 1) No dotā seko, ka ΔATB ir vienādsānu un $\angle TAB = \angle TBA$ (skat. 8. zīm.).
$\angle BTP = \angle TAP$ (pēc hordas-pieskares un ievilktā leņķa īpašībām), Tāpēc $\angle BTP = \angle TBP$ un ΔBPT ir vienādsānu, t. i., $TP = BP$.

2) No tā, ka ΔATB ir vienādsānu, seko, ka $AM = MB$. No tā un no $MQ \perp AB$ savukārt seko, ka ΔBQA ir vienādsānu. Tāpēc $\angle BAQ = \angle ABQ = 45°$. $\angle PTQ = \angle PAQ$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loka. Tādēļ $\angle PTQ = \angle PBQ$.



8. zīm.

No tā, ka $\angle BTP = \angle TBP$ un $\angle PTQ = \angle PBQ$, seko, ka $\angle BTQ = \angle TBQ$. Tāpēc ΔTBQ ir vienādsānu un $TQ = BQ$. No tā un no 1), 2) seko, ka $\Delta TPQ = \Delta BPQ$. Tāpēc $\angle TQP = \angle BQP$ (*).

No $\angle BMQ = \angle BPC = 90°$ izriet, ka $PC \parallel TQ$. Tāpēc $\angle QPC = \angle TQP$. Savukārt ap Q, P, B un C var apvilkt riņķa līniju, jo $\angle BQC = \angle BPC = 90°$. Tādēļ šajā riņķa līnijā $\angle QPC = \angle QBC$ un $\angle PQB = \angle PCB$ abos gadījumos kā leņķi, kas balstās uz vienu loku. No tā un no (*) iegūstam, ka $\angle QBC = \angle PCB$.

Tālāk $\angle ACP = 90° - \angle PAC = 45° = \angle ABQ$. Iegūstam, ka $\angle QBC + \angle ABQ = \angle PCB + \angle ACP$ vai $\angle ABC = \angle ACB$, no kā seko vajadzīgais.

11.4. Katram naturālam n aplūkosim virkni $\{G_i\}$ $i \geq 1$, kur G_i ir atlikums, ko iegūst F_i dalot ar n.

Ja $n=1$, tad katrs Fibonači virknes loceklis dalās ar n.

Ja $n>1$, tad F_1 un F_2 atlikums, dalot ar n, ir 1, tātad $G_1=G_2=1$.

Aplūkosim virknes G īpašības:

1) Virkne $\{G_i\}$ ir periodiska, jo katrai fiksētai n vērtībai virknes $\{G_i\}$ elementi var pieņemt vērtības no 0 līdz n-1, tātad divu secīgu elementu pāris var pieņemt n^2 dažādas vērtības. Tā kā virkne ir bezgalīga, tad kāds no pāriem atkārtosies, un tā kā divi secīgi virknes $\{G_i\}$ elementi viennozīmīgi nosaka visus tālākos virknes elementus, tad virkne $\{G_i\}$ būs periodiska.

2) Tā kā no katriem diviem Fibonači virknes locekļiem viennozīmīgi var iegūt visus iepriekšējos ($F_{i-2}=F_i-F_{i-1}$, $i \geq 3$), arī no katriem diviem secīgiem virknes $\{G_i\}$ elementiem viennozīmīgi var atjaunot iepriekšējos elementus, tāpēc virknei $\{G_i\}$ nav priekšperioda.

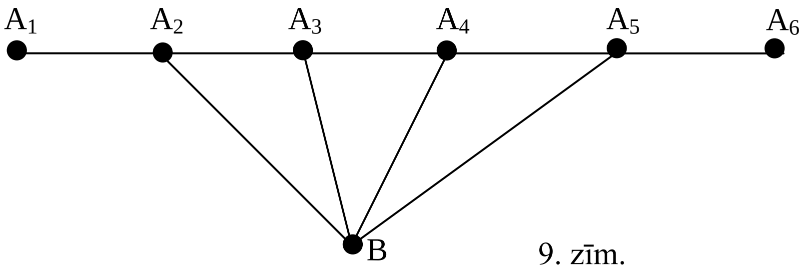
No 1) un 2) seko, ka virknē $\{G_i\}$ noteikti ir tāds k, ka $G_k=G_{k+1}=1$, $k > 2$, tad $G_{k-1}=0$. Tātad eksistē tāds Fibonači virknes loceklis F_{k-1}, kas dalās ar n.

11.5. **a)** Pieņemsim, ka ir 2 pilsētas, īsākais ceļš starp kurām iet caur vismaz četrām citām pilsētām. Tad šajā ceļā noteikti ir 2 tādas pilsētas, starp kurām īsākais ceļš iet **tieši** caur 4 citām pilsētām.
Apzīmēsim šīs 2 pilsētas ar A_1 un A_6, bet četras pilsētas starp tām – ar A_2, A_3, A_4 un A_5 (skat. 9.zīm.). Ja kāda cita pilsēta B ir savienota ar 4 vai vairāk no A_1, A_2, ... A_6, tad šo pilsētu var izmantot, lai „saīsinātu” īsāko ceļu starp A_1 un A_6. Piemēram, zīmējumā redzamajā gadījumā posmu $A_2 – A_3 – A_4 – A_5$ var aizstāt ar A_2-B-A_5. Tāpēc šāda situācija nav iespējama.

Tāpēc, katra cita pilsēta B var būt savienota ne vairāk kā ar 3 no A_1, A_2, ... A_6. Līdz ar to, ceļu skaits ir ne vairāk kā:

- 5 ceļi ceļā no A_1 uz A_6;
- Pa 3 ceļiem no katras citas pilsētas B uz A_1, A_2, ... A_6 (kopā, tas var dot 4·3=12 ceļus, jo ir 4 citas pilsētas B).
- 6 ceļi starp pārējām 4 pilsētām B_1, B_2, B_3, B_4, jo no 4 pilsētām var izveidot (4·3):2=6 pilsētu pārus.

Tātad ir ne vairāk kā 5+12+6=23 ceļi.



9. zīm.

b) Ja A_1, A_2, ... A_6 savieno, kā parādīts zīmējumā, katru citu pilsētu B_i, i=1, ..., 4, savieno ar A_4, A_5 un A_6 un katras 2 pilsētas B_i un B_j savieno savā starpā, tad izveidojas 23 ceļi un īsākajā ceļā starp A_1 un A_6 ir 4 pilsētas. (Tajā noteikti jābūt A_2, A_3, A_4 un vēl vienai pilsētai starp A_4 un A_6.)

12.1. Varam apzīmēt $x_i = 2\cos\alpha_i$, i=1, 2, ..., n. Ievērojam, ka

$$\cos 3\alpha = \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

no kurienes $2\cos 3\alpha = 8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha$. Tāpēc

$x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = (2\cos 3\alpha_1 + \ldots + 2\cos 3\alpha_n) + 6(\cos\alpha_1 + \ldots + \cos\alpha_n)$. Tā kā otrā iekava ir 0, tad

$$\left|x_1^3 + \ldots + x_n^3\right| \le \left|2\cos 3\alpha_1\right| + \ldots + \left|2\cos 3\alpha_n\right| \le 2n, \text{ k.b.j.}$$

12.2. Apskatīsim virknes, kurām vismaz viens no koeficientiem p vai q ir lielāks nekā 1 jeb $p+q>2$. Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka visi virknes $\{a_i\}$ locekļi dod atlikumu 1, dalot ar $p+q-1$ (tā kā $p+q>2$, tad $p+q-1>1$).

Indukcijas bāze:

$a_1=a_2=1$, tātad atlikums, dalot tos ar $p+q-1$, arī ir 1.

Induktīvais pieņēmums:

Pieņemsim, ka katram $i \le k$ dotās virknes loceklis a_i dod atlikumu 1, dalot ar $p+q-1$.

Induktīvā pāreja:

Apskatīsim virknes locekli a_{k+1} pēc moduļa $p+q-1$:

Saskaņā ar induktīvo pieņēmumu, a_k un a_{k-1} dod atlikumu 1, dalot ar $p+q-1$.

Tātad $a_{k+1}= p\cdot a_k+q\cdot a_{k-1} \equiv p\cdot 1+q\cdot 1=p+q=(p+q-1)+1$, t.i., a_{k+1} arī dod atlikumu 1, dalot ar $p+q-1$.

Tātad, ja $p+q > 2$, ir tāda n vērtība $n=p+q-1$, kurai neviens virknes $\{a_i\}$ loceklis nedalās ar n.

Tā kā zināms, ka katram naturālam skaitlim n eksistē tāds virknes loceklis a_k, ka a_k dalās ar n, tad nevar būt $p+q>2$. Bet p un q ir naturāli skaitļi, tātad $p=q=1$.

Piezīme. Pie $p=q=1$ tiek iegūta Fibonači skaitļu virkne, kurai minētās īpašības pierādījums dots 11.4. uzdevuma risinājumā.

12.3. Izmantosim īpašību, ka ja diviem trijstūriem ir vienādi augstumi, tad pamatu garumu attiecība ir vienāda ar trijstūru laukumu attiecību. No trijstūru mediānu attiecībām iegūstam, ka

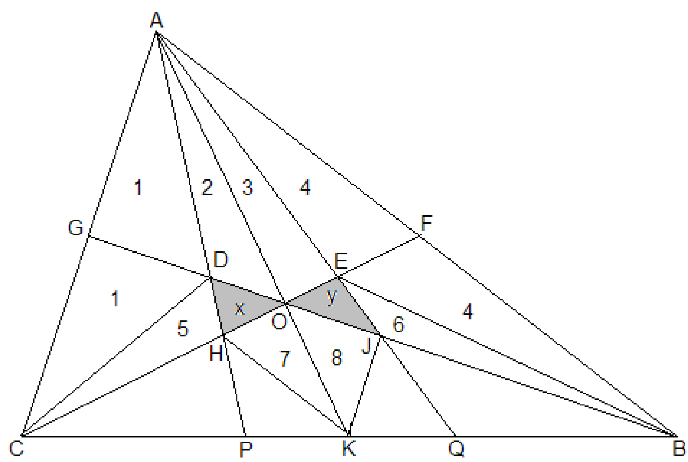
$L_{OAG}=L_{OGC}=L_{OAF}=L_{OFB}=L_{OBK}=L_{OCK}=L^*$

Vienlielus trijstūrus apzīmēsim ar vienādiem cipariem, mūs interesējošos trijstūrus atzīmēsim ar x un y (skat. 10. zīm.).

$L_{ADO}=L_{ODC}$, tātad $L_2 = L_x+L_5$ (1)

un $L_{AOE}=L_{OEB}$, tātad $L_3 = L_y+L_6$ (2)

$$\frac{L_{ADC}}{L_{ADB}} = \frac{CP}{CB-CP} = \frac{BQ}{CB-BQ} = \frac{L_{ABE}}{L_{ACE}}.$$



10. zīm.

$$\frac{2L_1}{L_2+2L^*}=\frac{2L_4}{L_3+2L^*}$$

$$\frac{2L_1}{3L^*-L_1}=\frac{2L_4}{3L^*-L_4}$$

Tātad $L_1=L_4$ un $L_2=L_3$. (3)

$L_{AOJ}=2L_{OJK}$ un $L_{OHA}=2L_{OHK}$,

$L_3+L_y=2L_8$ (4)

un $L_2+L_x = 2L_7$ (5)

$$\frac{L_{ABJ}}{L_{AKJ}}=\frac{L_{ACH}}{L_{AHK}}$$

$$\frac{2L_4+L_6}{L_3+L_y+L_8}=\frac{2L_1+L_5}{L_2+L_x+L_7}$$

Izmantojot vienādības (4) un (5), iegūstam:

$$\frac{2L_4+L_6}{\frac{3}{2}(L_3+L_y)}=\frac{2L_1+L_5}{\frac{3}{2}(L_2+L_x)}.$$

Pareizinām abas puses ar $\frac{3}{2}$ un ievietojam $L_6=L_3-L_y$ (no (1)), un $L_5=L_2-L_x$ (no (2)):

$$\frac{2L_4+L_3-L_y}{(L_3+L_y)}=\frac{2L_1+L_2-L_x}{(L_2+L_x)}$$

No (3) ievietojam $L_4=L_1$ un $L_3=L_2$:

$$\frac{2L_1+L_2-L_y}{(L_2+L_y)}=\frac{2L_1+L_2-L_x}{(L_2+L_x)}$$

$$2(L_1+L_2)(L_x-L_y)=0$$

$L_1+L_2\neq 0$, tad jābūt $L_x-L_y=0$ jeb $L_x=L_y$, k.b.j.

12.4. **a)** To var izdarīt, piemēram, izvietojot skaitļus pa apli pēc kārtas: 1234567.
Tā kā mums svarīgs tikai atlikums, dalot ar 7, tad vajadzības gadījumā pēc 7 sekojošos skaitļus 1, 2, 3... varam aizvietot ar 8, 9, 10... un uzskatīt, ka visas blakusesošo skaitļu summas ir secīgu naturālu skaitļu summas:

$$m+(m+1)+...+(m+d-1)=\frac{(2m+d-1)d}{2}=md+\frac{(d-1)d}{2}.$$

Pie fiksēta d, paņemot divus dažādus m: $m_1 < m_2$, šo vērtību atlikumi nevar sakrist, jo to starpība $(m_2 - m_1)d$ ar 7 nedalās (d ir skaitlis no 2 līdz 6, $(m_2 - m_1)$ – skaitlis no 1 līdz 6). Tāpēc visām dažādām m vērtībām no 1 līdz 7 visi atlikumi ir dažādi, tātad katrs no tiem parādās tieši vienu reizi.
b) To nevar izdarīt. Nevar pat panākt, lai aprakstītā īpašība izpildītos pie d=2: visu dažādo divu blakusesošo elementu summu summa ir 2(1+2+...+8) = 72, kas dalās ar 8, bet visu iespējamo atlikumu, dalot ar 8, summa ir 0+1+2+...+7 = 28, kas ar 8 nedalās.

12.5. Dosim risinājumu **b)** gadījumam. Skaidrs, ka, ja uzdevuma prasības var izpildīt ar 99 ierīces lietojumiem, tad ar 100 lietojumiem to arī var izdarīt.
Ar matemātisko indukciju pierādīsim, ka, ja ir n kredītkartes, ($n\geq 5$), tad ar n-1 ierīces lietojumiem pietiek, lai atrastu gan kredītkarti ar vislielāko naudas summu, gan kredītkarti ar otro lielāko naudas summu.
Induktīvā bāze. Pierādīsim, ka starp 5 kredītkartēm ar 4 ierīces lietojumiem var atrast kredītkarti ar lielāko naudas summu.

Apzīmēsim kredītkartes ar 1, 2, 3, 4, 5. Pieņemsim, ka kredītkartē 1 ir vislielākā naudas summa, kredītkartē 2 – otra lielākā, utt., kredītkartē 5 – starp šīm piecām vismazākā naudas summa.

Iespējami 5 veidi, kā lietot ierīci:

a) Ievieto 1, 2, 3, 4. Ierīce paziņo - 2.
b) Ievieto 1, 2, 3, 5. Ierīce paziņo - 2.
c) Ievieto 1, 2, 4, 5. Ierīce paziņo - 2.
d) Ievieto 1, 3, 4, 5. Ierīce paziņo - 3.
e) Ievieto 2, 3, 4, 5. Ierīce paziņo - 3.

Tātad ierīce vienmēr paziņos 2 vai 3. Tāpēc iespējams šāds algoritms kredītkaršu 1 un 2 identificēšanai.

1. Ievietosim ierīcē jebkuras 4 kredītkartes. Pieņemsim, ka ierīce paziņo A. Tad A=2 vai A=3.
2. Izmēģināsim visas četru kredītkaršu kombinācijas, kas satur A. (Tādu pavisam ir 4, un viena no tām jau ir izmēģināta.)

a) Ja trijos no četriem gadījumiem ierīce paziņo A, tad A=2. 1 ir kredītkarte, kas nebija ievietota ierīcē vienīgajā gadījumā, kad ierīce neziņoja 2 (tad bija ievietotas kredītkartes 2, 3, 4, 5.)

b) Ja divos no četriem gadījumiem ierīce paziņo A, tad A=3. 2 ir kredītkarte, ko ierīce paziņo pārējos divos gadījumos. 1 ir kredītkarte, kas nebija ievietota ierīcē tajā reizē, kad ierīcē bija gan 2, gan arī A=3, un ierīce paziņoja A(=3).

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka starp $5 \leq k \leq n$ kredītkartēm, lietojot ierīci k-1 reizi, var noteikt kartes ar vislielāko un otro lielāko naudas summu.

Induktīvā pāreja. Ja mums ir n+1 kredītkarte, tad:

1. Izvēlēsimies n kredītkartes (visas, atskaitot karti X). Saskaņā ar induktīvo pieņēmumu, starp tām ar n-1 ierīces lietojumu var atrast kredītkartes A un B, kas satur lielāko un otro lielāko naudas summu starp šīm n kredītkartēm.

2. n-tajā ierīces lietošanas reizē ievietosim ierīcē kredītkartes X, A, B un jebkuru citu kredītkarti. Iespējami šādi varianti:

a) Ierīce paziņo, ka otrā lielākā naudas summa ir kartē B. Tad kredītkartē X ir mazāk naudas nekā kredītkartēs A un B, tātad A un B joprojām paliek kartes ar vislielākajām naudas summām.

b) Ierīce paziņo, ka otrā lielākā naudas summa ir kartē A. Tad kredītkartē X ir visvairāk naudas, kartē A ir otra lielākā naudas summa.

c) Ierīce paziņo, ka otrā lielākā naudas summa ir kartē X. Tad kartē A ir visvairāk naudas, bet kartē X - otra lielākā naudas summa.