9.1. a) No pieciem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem viens dalās ar 5. Tātad arī to reizinājums dalās ar 5, bet 20112012 ar 5 nedalās.

b) No četriem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem ir divi pāra skaitļi, no kuriem viens dalās ar 4. Tātad to reizinājums dalās ar 8, bet 20112012 ar 8 nedalās.

9.2. Pieņemsim, ka šādu trijstūri iespējams izveidot. Pieņemsim, ka šī trijstūra laukums ir *S*, tad tā malu garumi ir $\frac{2S}{4}$, $\frac{2S}{7}$ un $\frac{2S}{10}$. Divu īsāko malu garumu summai jābūt lielākai par trešās malas garumu. Bet $\frac{2S}{7}+\frac{2S}{10}=\frac{17}{70}2S=\frac{34}{140}2S<\frac{35}{140}2S=\frac{2S}{4}$ - pretruna.Tātad šādu trijstūri izveidot nav iespējams.

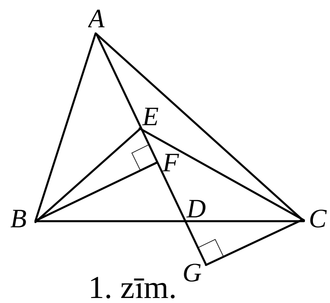
9.3. Atbilde: $q_2=0$.

Pēc Vjeta teorēmas $q_1=ab$, $q_2=bc$, $q_3=ac$. Tātad $ab\le bc\le ac\le 0$. Ja neviens no skaitļiem *a*, *b*, *c* nav nulle, tad divi no tiem ir vai nu abi pozitīvi, vai abi negatīvi, tāpēc to reizinājums ir lielāks nekā nulle. Tātad vismaz viens no skaitļiem *a*, *b*, *c* ir 0. Tad $q_3=ac=0$, tātad *a* vai *c* ir 0. Ja *c*=0, tad $q_2=bc=0$. Ja *a*=0, *c*≠0, tad $q_1=ab=0$ un no nevienādības $0\le q_2\le 0$ seko, ka $q_2=0$.

9.4. Atradīsim *AE* un *BC* krustpunktu *D* un pieņemsim, ka ∠*ADB*=α≤90°. Novilksim perpendikulus *BF* un *CG* pret *AD* (skat. 1. zīm.).

Pielietojot Pitagora teorēmu taisnleņķa trijstūros *ABF*, *BEF*, *ACG* un *ECG*, iegūstam:

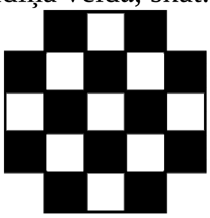
$$AB^2-BE^2=(AF^2+BF^2)-(BF^2+EF^2)=AF^2-EF^2=$$
$$=(AF-EF)(AF+EF)=AE(AF+EF)$$
$$AC^2-EC^2=(AG^2+CG^2)-(EG^2+CG^2)=AG^2-EG^2=$$
$$=(AG-EG)(AG+EG)=AE(AG+EG)$$

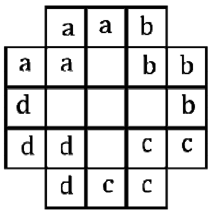


1. zīm.

Pēc dotā $AB^2-BE^2=AC^2-EC^2$ jeb $AF+EF=AG+EG$. Pieskaitot abām pusēm *AE*, iegūstam $AE+AF+EF=AE+AG+EG$ jeb $2AF=2AG$. Tātad punkti *F* un *G* sakrīt ar *AD*⊥*BC*.

9.5. Izkrāsosim doto figūru šaha galdiņa veidā, skat. 2. zīm.


2. zīm.



3. zīm.

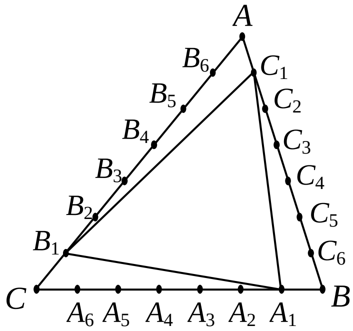
Katra izgriežamā figūriņa aizņem tieši divas baltas un divas melnas rūtiņas. Tā kā ir deviņas baltas rūtiņas, tad var izgriezt ne vairāk kā četras figūriņas. To, ka četras figūriņas var izgriezt, skat., piem., 3. zīm. (vienas figūriņas rūtiņas apzīmētas ar vienādiem burtiem).

10.1. Atbilde: *a* = 3.

Kāpinot pirmo vienādojumu kvadrātā un atņemot otro, iegūst $2xy=4-a$ jeb $xy=2-\frac{a}{2}$. Tad $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+x^2)=2(a-2+\frac{a}{2})=3a-4=a+2$ jeb *a* = 3.

Ievietojot dotajā sistēmā a=3, un atrisinot to, iegūstam atrisinājumus $x=1\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, $y=1\mp\sqrt{\frac{1}{2}}$.

10.2. Aprēķināsim $S_{A_1B_1C_1}$ (skat. 4. zīm.). $S_{A_1B_1C_1}=S_{ABC}-S_{A_1B_1C}-S_{AB_1C_1}-S_{A_1BC_1}$. ΔA_1B_1C augstums pret malu A_1C ir $\frac{1}{7}\frac{1}{7}$ no ΔABC augstuma pret malu BC. $A_1C=\frac{6}{7}BC$. Tātad $S_{A_1B_1C}=\frac{6}{49}S_{ABC}$. Līdzīgi arī $S_{AB_1C_1}=S_{A_1BC_1}=\frac{6}{49}S_{ABC}$. Tātad $S_{A_1B_1C_1}=\frac{31}{49}S_{ABC}$.



4. zīm.

Līdzīgi var aprēķināt $S_{A_2B_2C_2}=S_{ABC}-S_{A_2B_2C}-S_{AB_2C_2}-S_{A_2BC_2}$.
$L_{A_2B_2C_2}=L_{ABC}-L_{A_2B_2C}-L_{AB_2C_2}-L_{A_2BC_2}$ ΔA_2B_2C augstums pret malu A_2C ir $\frac{2}{7}\frac{2}{7}$ no ΔABC augstuma pret malu BC. $A_2C=\frac{5}{7}BC$. Tātad $S_{A_2B_2C}=\frac{10}{49}S_{ABC}$ $L_{A_2B_2C}=\frac{10}{49}L_{ABC}$. Līdzīgi, arī $S_{AB_2C_2}=S_{A_2BC_2}=\frac{10}{49}S_{ABC}$. Tātad $S_{A_2B_2C_2}=\frac{19}{49}S_{ABC}$ un $S_{A_1B_1C_1}+S_{A_2B_2C_2}=\frac{50}{49}S_{ABC}>S_{ABC}$.

10.3. Ja $N=\underbrace{666...6}_{n\,\text{"6"}}$, tad

$$N^2=\underbrace{66...6}_{n\,\text{"6"}}\cdot\underbrace{66...6}_{n\,\text{"6"}}=6\cdot6\cdot\underbrace{11...1}_{n\,\text{"1"}}\cdot\underbrace{11...1}_{n\,\text{"1"}}=4\cdot9\cdot\underbrace{11...1}_{n\,\text{"1"}}\cdot\underbrace{11...1}_{n\,\text{"1"}}=\underbrace{44...4}_{n\,\text{"4"}}\cdot\underbrace{99...9}_{n\,\text{"9"}}=$$

$$=\underbrace{44...4}_{n\,\text{"4"}}\cdot(1\underbrace{00...0}_{n\,\text{"0"}}-1)=\underbrace{44...4}_{n\,\text{"4"}}\underbrace{00...0}_{n\,\text{"0"}}-\underbrace{44...4}_{n\,\text{"4"}}=\underbrace{44...4}_{n-1\,\text{"4"}}3\underbrace{55...5}_{n-1\,\text{"5"}}6.$$

10.4. Aplūkosim piecstūri $A_1A_2A_3A_4A_5$. Ievērosim, ka kauliņi var tikt pārvietoti tikai pa ciklu $A_1A_3A_5A_2A_4A_1$, nemainot secību. Tātad kauliņi B un C nevar samainīties vietām.

10.5. Pieņemsim, ka laukums ir izkrāsots šaha galdiņa veidā. Jebkuram šādi krāsotam kvadrātam piemīt centrālā simetrija. Ievērosim, ka, šaha zirdziņu novietojot uz vienas krāsas lauciņa, tas apdraud pretējas krāsas lauciņus.

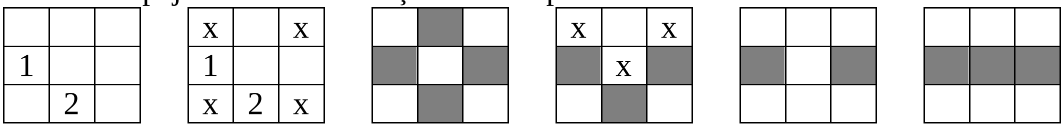
a) Uzvar otrais spēlētājs. Neatkarīgi no tā, kāds ir pirmā spēlētāja pirmais gājiens, otrais spēlētājs var izdarīt gājienu, kas simetrisks attiecībā pret laukuma centru – šis lauciņš ir tādā pašā krāsā, kā lauciņš, uz kura tikko uzlikts šaha zirdziņš, tātad tikko izdarītais gājiens neapdraud šo lauciņu. Līdz ar to, ja pirmais spēlētājs varēs izdarīt gājienu, tad arī otrajam spēlētājam būs iespējams izdarīt simetrisko gājienu.

b) Uzvar pirmais spēlētājs. Pirmajā gājienā zirdziņš jānovieto laukuma centrā, un pēc tam jāspēlē simetriski otrā spēlētāja gājieniem kā aprakstīts a) punktā.

11.1. Izvēlēsimies $a=4k^4$. Tad $n^4+4k^4=\left(n^2-2nk+2k^2\right)\left(n^2+2nk+2k^2\right)$ ir salikts skaitlis. Tā kā par k var izvēlēties jebkuru naturālu skaitli, tad ir bezgalīgi daudz atbilstošo a vērtību.

11.2. Nezaudējot vispārīgumu, varam pieņemt, ka tabulā pa reizei ierakstīti skaitļi no 1 līdz 9.

1) Pierādīsim, ka iekrāsoto rūtiņu skaits nepārsniedz 7. Nekad nevar būt iekrāsota rūtiņa, kurā ierakstīts 1 (jo katrā no virzieniem kādā rūtiņā būs ierakstīts lielāks skaitlis). Ja nav iekrāsota rūtiņa ar 2, tad jau divas rūtiņas ir neiekrāsotas un kopējais iekrāsoto rūtiņu skaits nepārsniedz 7. Ja rūtiņa ar 2 ir iekrāsota, tad tas iespējams tikai tad, ja 1 un 2 abi atrodas uz „īsās" diagonāles (skat. 5. zīm.).
Aplūkosim tabulas stūra rūtiņas (skat. 6. zīm.). Rūtiņa ar mazāko no šiem četriem skaitļiem nebūs iekrāsota, jo visos virzienos ir kāda rūtiņa, kurā ierakstīts lielāks skaitlis. Tātad vēl vismaz viena rūtiņa ir neiekrāsota un kopējais iekrāsoto rūtiņu skaits nepārsniedz 7.



5. zīm. 6. zīm. 7. zīm. 8. zīm. 9. zīm. 10. zīm.

2) pierādīsim, ka iekrāsotas ir vismaz 5 rūtiņas.
Aplūkosim četras rūtiņas, kas atrodas tabulas sānu malu vidū (skat. 7. zīm. iekrāsotās rūtiņas). Tās pa pāriem veido četras īsās diagonāles. Tātad vismaz divas no tām ir iekrāsotas. Aplūkosim visus trīs iespējamos variantus:

a) visas četras vidus rūtiņas ir iekrāsotas (skat. 7. zīm.). Bet tad jābūt iekrāsotai vismaz vēl vienai rūtiņai uz garās diagonāles. Līdz ar to kopējais iekrāsoto rūtiņu skaits ir vismaz 5.

b) iekrāsotas trīs vidus rūtiņas (skat. 8. zīm.). Aplūkosim rūtiņas, kas atzīmētas ar „x". Katrām divām „x" rūtiņām ir kopīgs viens rūtiņu virziens (augšējā rinda, abas garās diagonāles). Katrā no šiem virzieniem jābūt kādai iekrāsotai rūtiņai. Ar vienas rūtiņas iekrāsošanu nevar „nosegt" visus trīs virzienus uzreiz. Tātad kopējais iekrāsoto rūtiņu skaits ir vismaz 3+2=5.

c) iekrāsotas ir divas vidus rūtiņas (skat. 9. zīm.). Tā kā tās „nosedz" visas četras īsās diagonāles, tad tām jābūt kādas rindas vai kolonnas pretējām rūtiņām. Tā kā vairāk neviena sānu malu vidus rūtiņa nav iekrāsota, tad vidējā kolonnā jābūt iekrāsotai centrālajai rūtiņai (skat. 10. zīm.). Tas nozīmē, ka vēl pa vienai iekrāsotai rūtiņai jābūt tabulas augšējā un apakšējā rindā un kopējais iekrāsoto rūtiņu skaits ir vismaz 5.

Tātad iekrāsoto rūtiņu skaits ir **vismaz 5 un ne vairāk par 7**. 11., 12. un 13. zīm. skat. piemērus katram no gadījumiem.

1	5	2
7	8	9
4	6	3

11. zīm.

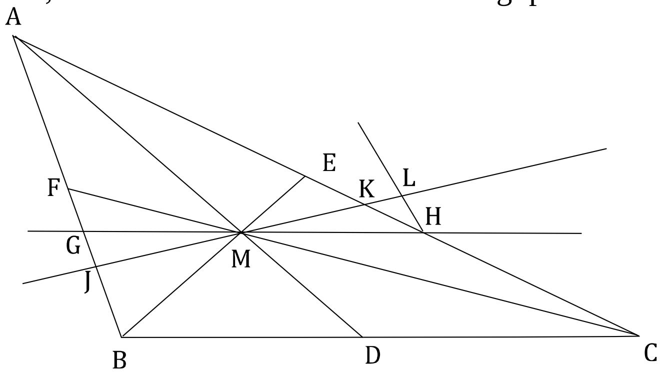
7	3	1
6	8	4
2	5	9

12. zīm.

7	3	8
2	5	4
6	1	9

13. zīm.

11.3. Izvēlēsimies vienu trijstūra malu (piem., *BC*) un caur mediānu *AD*, *BE* un *CF* krustpunktu *M* novilksim tai paralēlu taisni, kas malas *AB* un *AC* krusto attiecīgi punktos *G* un *H* (skat. 14. zīm.).



14. zīm.

Trijstūra *AGH* laukums ir $\frac{4}{9}$ no trijstūra *ABC* laukuma (seko no Talesa teorēmas un mediānu īpašības).

Tātad četrstūra *BGHC* un trijstūra *AGH* laukumu attiecība ir 5:4. Pierādīsim, ka šī arī ir lielākā iespējamā trijstūra daļu laukumu attiecība. Aplūkosim, kas notiek, ja taisni *GH* pagriež ap punktu *M*, iegūstot taisni *JK*. Tad $S_{AJK} = S_{AGH} - S_{KMH} + S_{GMJ}$. Novelkam $HL \parallel AB$ ($L \in JK$). $\angle KHL=\angle BAC$, tāpēc $S_{KHL}>0$, $S_{GMJ}=S_{MHL}$ pēc pazīmes (*lml*): $GM=MH$ (*AM* ir ΔGAH mediāna), $\angle GMJ=\angle LMH$ un

$\angle MGJ = \angle MHL$. Tātad, neatkarīgi no punkta J izvēles, $S_{GMJ} > S_{MKH}$. Aplūkosim četrstūra BJKC un trijstūra AJK laukumu attiecību:

$$\frac{S_{BJKC}}{S_{AJK}} = \frac{S_{BGHC} - S_{GMJ} + S_{MKH}}{S_{AGH} + S_{GMJ} - S_{MKH}} < \frac{S_{BGHC}}{S_{AGH}} = \frac{5}{4}.$$

Brīdī, kad J punkts „sasniegs” B (vai K „sasniegs” C), abu daļu laukumi būs vienādi (mediāna dala trijstūri vienlielās daļās), t.i., šo laukumu attiecība būs 1.

Analogi pierāda, ka $S_{BJM} \geq S_{EKM}$, tāpēc $\frac{S_{BJKC}}{S_{AJK}} = \frac{S_{BEC} + S_{BJM} - S_{EKM}}{S_{ABE} - S_{BJMJ} + S_{EKM}} \geq \frac{S_{BEC}}{S_{ABE}} = 1$. Tātad $1 \leq \frac{S_{BJKC}}{S_{AJK}} \leq \frac{5}{4}$.

11.4. Ievērosim, ka a_n ir augoša skaitļu virkne un visi tās locekļi ir lielāki vai vienādi ar 5.

$$a_n = a_1 a_2 ... a_{n-1} + 4$$

$$(a_n)^2 = a_1 a_2 ... a_{n-1} a_n + 4a_n$$

$$(a_n)^2 - 4a_n + 4 = a_1 a_2 ... a_{n-1} a_n + 4$$

$$(a_n - 2)^2 = a_{n+1}$$

Tā kā $a_n - 2 > 0$ visām n vērtībām, varam vilkt kvadrātsakni no abām vienādojuma pusēm.

$a_n - 2 = \sqrt{a_{n+1}}$ jeb $a_n - \sqrt{a_{n+1}} = 2$ visiem $n>1$.

Atliek pārbaudīt gadījumu, ka $n=1$: $a_1 = 5$, $a_2 = 5 + 4 = 9$, $a_1 - \sqrt{a_2} = 5 - \sqrt{9} = 2$. Tātad sakarība ir spēkā visiem $n \geq 1$.

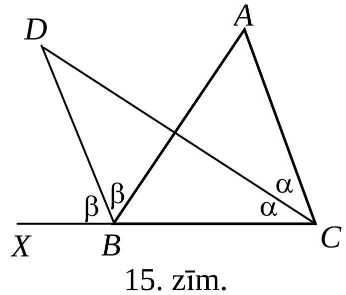
11.5. Otrais spēlētājs vienmēr var uzvarēt. Lai to panāktu, pēc katra pirmā spēlētāja gājiena viņš nogriež sev sektoru, kas ir simetrisks tikko nogrieztajam pirmā spēlētāja sektoram attiecībā pret riņķa centru. Tādā veidā otrais spēlētājs vienmēr varēs veikt gājienu, jo, ja pirmais spēlētājs sev varēja nogriezt kādu sektoru, tad pirms viņa gājiena šis sektors vēl nebija nogriezts un attiecīgi tam simetriskais sektors arī nebija nogriezts (ievērojam, ka sektora laukums nav lielāks par $\frac{1}{2}$, tāpēc simetriski sektori nepārklājas). Atliek ievērot tikai to, ka spēle noteikti beigsies, jo ar katru gājienu riņķa pieejamais laukums samazinās vismaz par $\frac{1}{100}$ no pilnā riņķa laukuma vērtības.

12.1. Der, piemēram, virknes $a_i = i + 2013$ un $b_i = i$.

$a_{b_i} = a_i = i + 2013$, $b_{a_i} = b_{i+2013} = i + 2013$, $a_i - b_i = 2013 > 2012$.

12.2. Apzīmēsim $\angle ACD = \angle BCD = \alpha$ un $\angle ABD = \angle DBX = \beta$ (skat. 15. zīm.). Tad $\angle ABC = 180° - 2\beta$, $\angle BAC = 180° - \angle ABC - \angle ACB = 2\beta - 2\alpha = 2(\beta - \alpha)$ un $\angle BDC = 180° - \angle DBA - \angle ABC - \angle DCB = 180° - \beta - (180° - 2\beta) - \alpha = \beta - \alpha$.

Aplūkosim divas riņķa līnijas, kas apvilktas attiecīgi trijstūriem BDC un ABC. Abas satur hordu BC. Trijstūrim BDC apvilktajā riņķa līnijā uz šīs hordas balstās ievilktais leņķis BDC. Tātad atbilstošā centra leņķa lielumam jābūt divreiz lielākam par $\angle BDC$ jeb jābūt vienādam ar $2(\beta - \alpha) = \angle BAC$, kas sakrīt ar ap trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas ievilktā leņķa, kas balstās uz hordu BC, lielumu.



15. zīm.

Tātad ap trijstūri BDC apvilktās riņķa līnijas centrs atradīsies uz ap trijstūri ABC apvilktās riņķa līnijas.

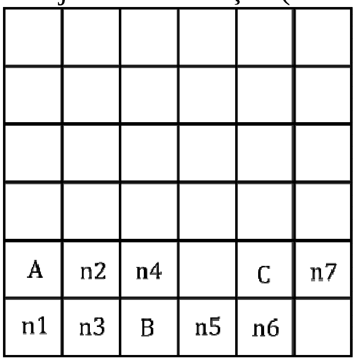
12.3. Acīmredzot vērtības $n = 1$ un $n = 2$ neder par vienādojuma saknēm, tāpēc apskatām gadījumu kad $n \geq 3$. Vienādojuma labajā pusē ir $n - 1$ saskaitāmie, kuri visi nav mazāki par 1 ($\left[\dfrac{n}{n+i}\right] = 0$ katram $i = 1, 2, ..., 2012$), tāpēc šajā gadījumā

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \ldots \geq \left[\frac{n}{2}\right] + 1 + 1 + \ldots + 1 = \left[\frac{n}{2}\right] + n - 2\,.$$

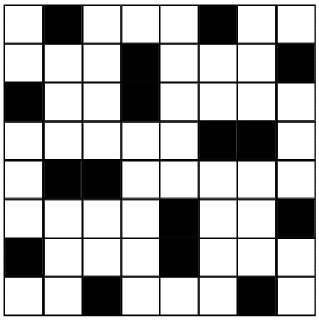
Tāpēc $n \geq \left[\dfrac{n}{2}\right] + n - 2$, jeb $2 \geq \left[\dfrac{n}{2}\right]$. No pēdējās nevienādības seko, ka $\dfrac{n}{2} < 3$ un tāpēc $n \leq 5$. Tāpēc $3 \leq n \leq 5$. Pārbaude rāda, ka der vērtības $n = 4$ un $n = 5$.

12.4. a) nav iespējams.

Aplūkosim laukuma apakšējās malas rūtiņas (skat. 16. zīm.)



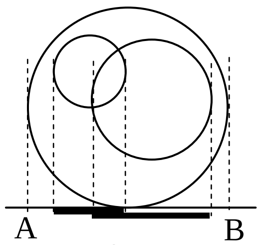
16. zīm.


17. zīm.

Ievērosim, ka neviena stūra rūtiņa nevar būt iekrāsota (jo katrai no tām ir tikai divas kaimiņu rūtiņas). Pieņemsim, ka rūtiņas n1 iekrāsotā kaimiņu rūtiņa ir A (ja izvēlētos apakšējās rindas blakus rūtiņu, tad tālākie spriedumi būtu simetriski jāattiecina uz kreiso malu). A ir tikai trīs kaimiņu rūtiņas – tātad tās visas ir neiekrāsotas un arī n2 ir neiekrāsota (tātad A ir n2 iekrāsotā kaimiņu rūtiņa un n3 ir neiekrāsota). Vienīgā n3 kaimiņu rūtiņa, kas var būt iekrāsota, ir B un, tātad, neiekrāsotas ir arī n4 un n5. n6 nevar būt iekrāsota, jo tad n5 būtu divi iekrāsoti kaimiņi. n6 iekrāsotā kaimiņu rūtiņa var būt tikai C. n7 nevar būt iekrāsota, jo tai ir tikai trīs kaimiņi, no kuriem viena rūtiņa jau ir iekrāsota. Līdz ar to esam ieguvuši situāciju, ka apakšējā labā stūra rūtiņa nevar būt nedz iekrāsota (tad n6 būtu divi iekrāsoti kaimiņi), nedz neiekrāsota (jo tad tai nav iekrāsota kaimiņu rūtiņa). Tātad šāds krāsojums nav iespējams.

b) ir iespējams. Piemēram, skat., 17. zīm.

12.5. Novilksim dotajam riņķim pieskari un projecēsim uz tās uzzīmēto riņķu diametrus, kas paralēli novilktajai piekarei (piem., skat., 18. zīm.). Šo diametru projekciju garumi ir vienādi ar attiecīgo diametru garumiem. Visu uzzīmēto riņķu diametru projekcijas atrodas nogriežņa *AB* iekšpusē. Tā kā nogriežņa AB garums ir 1, bet visu uzzīmēto riņķu diametru kopējais garums (un tātad arī projekciju kopējais garums) lielāks nekā 8, tad uz nogriežņa AB būs kāds punkts, kas pieder vairāk nekā 8, t.i., vismaz 9, riņķu diametru projekcijām (pretējā gadījumā katrs nogriežņa AB punkts pieder ne vairāk kā 8 diametru projekcijām, tātad to kopējais garums nepārsniedz 8). Caur šo punktu velkot taisni perpendikulāri AB, tā krustos vismaz deviņus uzzīmētos riņķus.



18. zīm.
