Latvijas 62. matemātikas olimpiādes
3. kārtas uzdevumi

9. klase

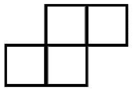
1. a) Vai piecu pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums var būt skaitlis 20112012?
b) Vai četru pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums var būt skaitlis 20112012?

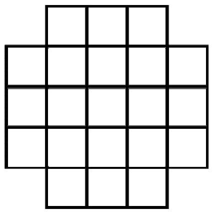
2. Pierādīt, ka nav iespējams izveidot trijstūri, kura augstumu garumi ir 4 cm, 7 cm un 10 cm.

3. Kvadrātvienādojuma $x^2+p_1x+q_1=0$ saknes ir a un b, kvadrātvienādojuma $x^2+p_2x+q_2=0$ saknes ir b un c, bet kvadrātvienādojuma $x^2+p_3x+q_3=0$ saknes ir a un c. Zināms, ka $q_1 \le q_2 \le q_3 \le 0$. Kādas ir iespējamās q_2 vērtības?

4. Trijstūra ABC iekšpusē izvēlēts punkts E tā, ka $AB^2 - BE^2 + EC^2 = AC^2$. Pierādīt, ka $AE \perp BC$!

5. Kādu lielāko skaitu 1. zīm. attēloto figūru var izgriezt no 2. zīm. attēlotās figūras? Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām.


1. zīm.


2. zīm.

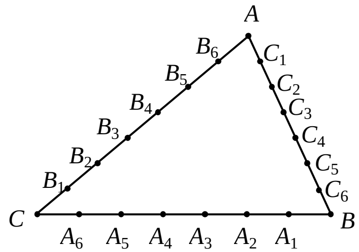
10. klase

1. Kādām a vērtībām vienādojumu sistēmai

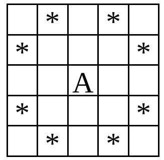
$$\begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2=a \\ x^3+y^3=a+2 \end{cases}$$

ir atrisinājums reālos skaitļos?

2. Trijstūra ABC katra mala sadalīta septiņās vienādās daļās (skat. 3. zīm.). Pierādīt, ka $S_{A_1B_1C_1}+S_{A_2B_2C_2}>S_{ABC}$.



3. zīm.



4. zīm.

3. Naturāla skaitļa N decimālajā pierakstā izmantots tikai cipars 6. Pierādīt, ka skaitļa N^2 decimālajā pierakstā nav cipara 0.

4. Trijās no piecstūra virsotnēm atrodas kauliņi A, B, C. Atļauts pārbīdīt kauliņu pa piecstūra diagonāli uz citu virsotni, ja tā ir brīva. Vai, atkārtoti pārbīdot šos kauliņus, var panākt, lai kauliņš A atrastos savā vietā, bet kauliņi B un C būtu samainījušies vietām?

5. Divi spēlētāji uz $N\times N$ rūtiņas liela laukuma spēlē sekojošu spēli. Spēlētāji gājienus izdara pēc kārtas, katrā gājienā novietojot šaha zirdziņu uz pagaidām neapdraudēta laucīņa (visu zirdziņu krāsa ir vienāda). Spēlētājs, kurš nevar izdarīt kārtējo gājienu, zaudē. Kurš no spēlētājiem, pareizi spēlējot, uzvar, ja **a)** N=12, **b)** N=21?
(Ja šaha zirdziņš atrodas rūtiņā A, tad tas apdraud visas ar * apzīmētās rūtiņas, skat. 4. zīm.)

Latvijas 62. matemātikas olimpiādes
3. kārtas uzdevumi

11. klase

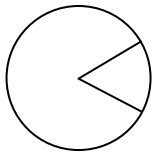
1. Pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz naturālu skaitļu *a*, kuriem skaitlis $n^4 + a$ ir salikts skaitlis visiem naturāliem skaitļiem $n > 1$.

2. 3×3 rūtiņu tabulā katrā no rūtiņām ierakstīts pa atšķirīgam naturālam skaitlim. Ja rūtiņā ierakstītais skaitlis ir lielākais savā rindā, savā kolonnā vai diagonālē, kurā ir vismaz divas rūtiņas, tad šī rūtiņa tiek iekrāsota. Cik rūtiņas tabulā var būt iekrāsotas?

3. Taisne, kas iet caur trijstūra mediānu krustpunktu, dala trijstūri divās daļās. Kāda ir maksimālā šo daļu laukumu attiecība?

4. Dota naturālu skaitļu virkne $\{a_i\}$, kur $a_1 = 5$ un katram $n > 1$ $a_n = a_1 a_2 ... a_{n-1} + 4$. Pierādīt, ka visiem $n \geq 1$ ir spēkā sakarība $a_n - \sqrt{a_{n+1}} = 2$.

5. Divi zēni pēc kārtas griež apaļu kūku, katru reizi nogriežot pa vienam gabalam, kura virspuse ir dotās kūkas virspuses sektora formā, pie tam gabala virspuses laukumam jābūt ne mazākam kā $\frac{1}{100}$ un ne lielākam kā $\frac{1}{2}$ no sākotnēja kūkas virspuses laukuma (skat. 5. zīm.).



5. zīm.

Zaudē tas spēlētājs, kurš vairs nevar nogriezt nevienu atļautā lieluma gabalu. Kurš no zēniem uzvarēs, pareizi spēlējot?

12.klase

1. Divām naturālu skaitļu virknēm $\{a_i\}$ un $\{b_i\}$ katram $i \geq 1$ ir spēkā sakarības:

$$a_{b_i} = b_{a_i} \text{ un } |a_i - b_i| > 2012.$$

Atrast vienu šādu virkņu piemēru.

2. Trijstūra *ABC* leņķa *ACB* bisektrise un leņķa *ABC* papildleņķa bisektrise krustojas punktā D. Pierādīt, ka trijstūrim BCD apvilktās riņķa līnijas centrs atrodas uz trijstūrim *ABC* apvilktās riņķa līnijas.

3. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$n = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + ... + \left[\frac{n}{n+2012}\right]$$

([*x*] ir veselā daļa no *x* – lielākais veselais skaitlis, kas nepārsniedz *x*; piem., [3]=3, [4,6]=4, [0,2]=0 u.tml.)

4. Kvadrātā ar izmēriem *N*×*N* rūtiņas dažas rūtiņas ir nokrāsotas tā, ka katrai nokrāsotai rūtiņai tieši trīs kaimiņu rūtiņas ir nenokrāsotas, bet katrai nenokrāsotai rūtiņai ir tieši viena nokrāsota kaimiņu rūtiņa. Vai šāds krāsojums ir iespējams, ja **a)** *N*=6, **b)** *N*=8?
Rūtiņas sauc par kaimiņu rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.

5. Riņķa ar diametru 1 iekšpusē uzzīmēti vairāki riņķi, kuru diametru summa ir lielāka nekā 8. Pierādīt, ka var novilkt taisni, kas krusto vismaz 9 uzzīmētos riņķus.