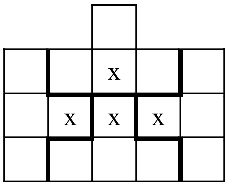
ĪSI ATRISINĀJUMI/ ATBILDES

5.1. Jā, var. Piemēram: $35+6+47+28+19=135$.

5.2. a) no diviem ķieģeļiem var salikt kubu $2\times2\times2$, no astoņiem šādiem kubiem – prasīto.

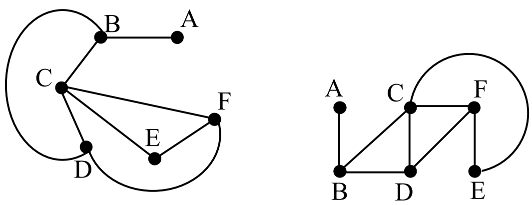
b) nē; mazo kubiņu kopskaits 125 nedalās ar 4 – kubiņu skaitu vienā ķieģelī.

5.3. Atbilde: 4. Skat. 1.zīm. Katrā no tur redzamajām 4 daļām jābūt atzīmētai vismaz vienai rūtiņai. Savukārt 4 atzīmētās rūtiņas apmierina uzdevuma prasības.



1.zīm.

5.4. Skat., piem., 2.zīm.



4.zīm.

5.5. Atbilde: 14 *l*.

Risinājums. Skaidrs, ka katrā spainī vienmēr ir vesels skaits litru. Sadalījums nevar būt 0; 0; 15, jo tad pēdējā gājienā tiktu salieti kopā divi ūdens daudzumi pa $7\frac{1}{2}$ *l* katrs. Kā savākt 14 *l* vienā spainī, skat., piem., pievienoto tabulu 3.zīm.

1	2	3	4	5
1	2	6	1	5
1	2	6	2	4
1	2	4	4	4
1	2	4	8	0
2	2	4	7	0
0	4	4	7	0
0	0	8	7	0
0	0	1	14	0

3.zīm.

6.1. Iespējami pavisam 10 dažādi pēdējie cipari. Tā kā $11>10$, tad diviem skaitļiem pēdējie cipari ir vienādi. Tos var ņemt par meklējamiem.

6.2. Atbilde: uzvar Katrīna.

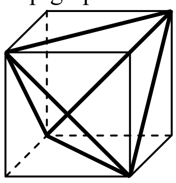
Katrīna domās sadala lielo kvadrātu daļās ar izmēriem 2×2. Tikko Andris nokrāso rūtiņu kādā no šīm daļām, Katrīna nokrāso atlikušās rūtiņas šai daļā.

6.3. Nē, nevar. Viegli saprast, ka pēc katra gājiena visu konfekšu daudzumi ir vienas paritātes skaitļi (vai nu visi pāra, vai visi nepāra). Tāpēc nevar iegūt situāciju (0; 0; 1).

6.4. Viegli saprast: jebkurā gadījumā visi šillišallas atbild vienādi, visi votivapas – arī. Ja šillišallu būtu vairāk, tad viņu pārsvars būtu vismaz 6 : 4. Tad starp aptaujātajiem būtu vismaz viens šillišalla, un viņa atbilde būtu aplama – pretruna. Līdzīgi iegūst pretrunu, pieņemot, ka vairāk ir votivapu. Tāpēc atliek tikai iespējam, ka gan vienu, gan otru ir tieši pieci. Pārbaude parāda, ka tas apmierina uzdevuma nosacījumus.

6.5..**Atbilde:** 12.

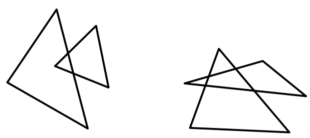
Piemēru skat. 4.zīm.; katrā no 4 virsotnēm ir pa 3 draudzībām. Pavisam novilktas 6 diagonāles *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*. Pavisam no tām var izveidot 15 pārus: *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *af*, *bc*, *bd*, *be*, *bf*, *cd*, *ce*, *cf*, *de*, *df*, *ef*. Bet trijos pāros diagonāles nevar būt draudzīgas, jo diagonālēm, kas atrodas kuba pretējās skaldnēs, kopīgu punktu nav. Tāpēc draudzību skaits nepārsniedz $15-3=12$.



4.zīm.

7.1. Starp skaitļu pirmreizinātājiem ir tieši 2 trijnieki: skaitlī 3 un skaitlī 6. Viens no tiem nevar „noīsināties", „nenoīsinoties" arī otram. Tāpēc vērtība „3" nav iespējama.
Izteiksmes $1:(2:3:4:(5:6))$ vērtība ir 5.

7.2. Skat. 5.zīm.



5.zīm.

	x			x	
x	**1**	x	x	**3**	x
	x			x	
	x			x	
x	**4**	x	x	**2**	x
	x			x	

6.zīm.

7.3. Pieņemsim pretējo. Tad 16 skaitļi, kas 6.zīm. atrodas ar krustiņiem atzīmētajās rūtiņās, visi ir dažādi un lielāki par 4. Lielākais no tiem tātad ir ≥ 20 . Tā starpība ar to no skaitļiem 1; 2; 3; 4, kam tas atrodas blakus, ir vismaz 16 – pretruna.

7.4. Atbilde: a) nē, **b)** nē.

Risinājums. a) Lai katra no monētām A un D nonāktu rindas otrā galā, tai jāpiedalās 3 maiņās, pat visu laiku virzoties vienā virzienā; ja kāda monēta izdara „soli atpakaļ", gājienu skaits jau ir vismaz 5. Tātad A un D kopā izdara vismaz $3+3=6$ gājienus; tikai viens no tiem ir kopīgs, tātad jau A un D kopā jāizdara vismaz 5 gājieni.

b) Iedomāsimies, ka monētas ir punkti, kas kustas pa skaitļu asi, un apzīmēsim to attēlotos skaitļus attiecīgi ar a; b; c; d. Apskatām izteiksmi

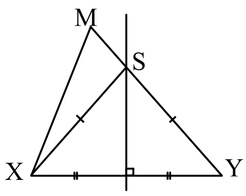
$$R=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

Katrā gājienā tieši viena iekava maina zīmi, tāpēc zīmi maina arī R. Tātad pēc 99 gājieniem R būs pretēja zīme nekā sākumā. Bet, ja monētas būtu pārkārtojušās pretējā secībā, tad **visas** iekavas būtu mainījušas zīmi, tātad R zīme būtu tāda pati kā sākumā. Iegūta pretruna.

7.5. Jā, var. Skat., piem., 7.zīm.

1	2	3	6	12
4	5	7	8	24
10	9	11	14	44
13	16	15	12	56
28	32	36	40	

7.zīm.



8.zīm.

8.1. Pirmskaitļi 7 un 11 nevar būt starp šiem skaitļiem, jo tikai vienas grupas skaitļu reizinājums var dalīties ar 7 resp. 11. Atlikušajos skaitļos kopā ir 5 – nepāra skaits – pirmreizinātāji „3", tāpēc vismaz vēl viens skaitlis jāizslēdz. Tāpēc sadalīti var tikt ne vairāk kā $12-3=9$ skaitļi. Piemērs

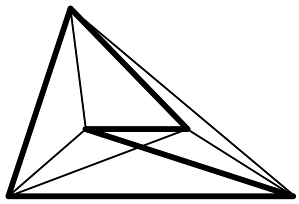
$$1\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8=2\cdot 4\cdot 9\cdot 10$$

parāda, ka 9 skaitļus var sadalīt tā, kā prasīts uzdevumā.

8.2. Atcerēsimies vispārzināmu faktu: ja punkts M atrodas uz to pašu pusi no nogriežņa XY vidusperpendikula kā X, tad $MX < MY$.
Tiešām (skat. 8.zīm.) $MX < MS + SX = MS + SY = MY$.
Pamatojoties uz šo faktu un zīmējuma elementu izvietojumu, iegūstam

$$OA > OB = OC > OD$$, k.b.j.

8.3. Skat., piem., 9.zīm. Piecstūra malas zīmētas ar resnākām, diagonāles – ar tievākām līnijām.



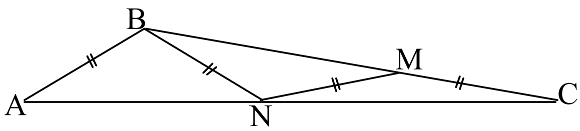
9.zīm.

8.4. Nē, nevar. No katras virsotnes iziet 3 šķautnes. Tāpēc, aprēķinot visu virsotņu un visu šķautņu numuru summu, iegūtajā rezultātā katras virsotnes numurs ieietu kā saskaitāmais tieši 4 reizes, un citu saskaitāmo nebūtu, bet summa $1+2+3+...+19+20=210$ nedalās ar 4.

8.5. Rūķīši cits citu neapdzen. Tāpēc katru divu rūķīšu veikto pilno apļu daudzumi neatšķiras viens no otra vairāk kā par 1. Kopējais veikto pilno apļu daudzums ir $1+12+12\cdot 60=733=3\cdot 244+1$. No šejienes viegli saprast, ka Sniegbaltītei tika pateikti skaitļi 244; 244; 245.

9.1. Pierādīsim, ka c = 7. Ja būtu $c\le 6$, tad $a+b\le 4+5=9$ - pretruna. Ja būtu $c\ge 8$, tad $d+e\ge 9+10=19$ - pretruna. Tātad $a+b+c+d+e=(a+b)+c+(d+e)=10+7+18=35$.

9.2.



Vairākas reizes lietojot vienādsānu trijstūra un trijstūra ārējā leņķa īpašības, pakāpeniski iegūstam: $\angle MNC=20°$; $\angle BMN=20°+20°=40°$; $\angle MBN=40°$; $\angle BNM=180°-2\cdot 40°=100°$; $\angle BNA=180°-100°-20°=60°$; $\angle BAN=60°$. Tātad ΔABN ir regulārs, no kā seko vajadzīgais.

9.3. Skaitlim n pieskaitot 4, pārnesumi nerodas. Tāpēc $n+4$ ciparu summa ir $11(1+2+3+4)+4=114$. Tā kā 114 dalās ar 3, tad arī $n+4$ dalās ar 3. Tā kā $n+4>3$, tad tas nav pirmskaitlis.

9.4. Vispirms uzdodam 3 jautājumus un pēc katras atbildes „noliekam malā" norādīto vidējo monētu (tā vairs nepiedalās nākošajos no šiem 3 jautājumiem). Palikušās, malā nenoliktās divas monētas ir smagākā un vieglākā no visām (mēs nezinām, „kura ir kura").

Tagad meklēto monētu atrodam ar vienu jautājumu par „malā noliktajām" monētām.

9.5. To, ka skaitlis n ir nokrāsots balts/sarkans, pierakstīsim kā n~b/n~s; varam uzskatīt, ka 5~b un 6~s.

Tagad pieņemsim no pretējā, ka uzdevuma apgalvojums nav spēkā. Šķirojam divus gadījumus.

A: 0 ~ s

Apskatām summu, kas ir 0	Secinām
(-6) + 0 + 6	(-6) ~ b
1 + 5 + (-6)	1 ~ s
(-1) + 0 + 1	(-1) ~ b
(-4) + (-1) + 5	(-4) ~ s
(-2) + (-4) + 6	(-2) ~ b
4 + 0 + (-4)	4 ~ b
2 + 4 + (-6)	2 ~ s
(-2) + 0 + 2	(-2) ~ b
3 + (-1) + (-2)	3 ~ s
(-3) + 0 + 3	(-3) ~ b

Iegūta pretruna, jo (-3) + (-2) + 5 = 0.

B: 0 ~ b

Apskatām summu, kas ir 0	Secinām
(-5) + 0 + 5	(-5) ~ s
(-1) + (-5) + 6	(-1) ~ b
1 + 0 + (-1)	1 ~ s
4 + 1 + (-5)	4 ~ b
(-4) + 0 + 4	(-4) ~ s
3 + (-4) + 1	3 ~ b

(-3) + 0 + 3	(-3) ~ s
2 + (-3) + 1	2 ~ b
(-2) + 0 + 2	(-2) ~ s

Iegūta pretruna, jo (-2) + (-4) + 6 = 0.

10.1. Atbilde: $a=-3$ un $a=-12$.

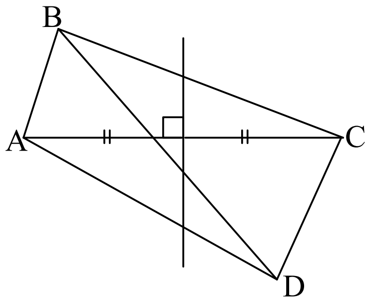
Vienādojumu var pārveidot par $(x-2)(x^2+2x+(a+4))=0$. Šķirojam 2 iespējas.

A. $x = 2$ ir vienkārtīga sakne. Tad kvadrātvienādojumam D = 0 $\Rightarrow$ $a=-3$, tad divkārtīgā sakne iznāk $x=-1$. Tātad šī a vērtība der.

B. $x = 2$ ir divkārtīga sakne. Tad $x = 2$ ir arī kvadrāttrinoma sakne $\Rightarrow$ $a=-12$. Otra sakne kvadrāttrinomam iznāk $x=-4$. Tātad arī šī a vērtība der.

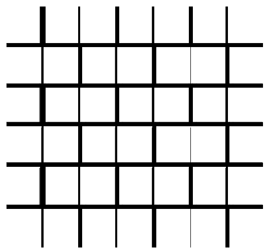
10.2. Saskaņā ar doto B un D atrodas dažādās pusēs vidusperpendikulam (skat. zīm.) Tad $BA<BC$ un $DC<DA$, tāpēc $BA+DC<BC+DA$.

Bet, ja $ABCD$ varētu ievilkt riņķa līniju, tad būtu $BA+DC=BC+DA$ - pretruna.



10.3. Abu izteiksmju starpība $(2n^3+4n)-(n^3+5n)$ = n^3-n = $(n-1)\,n\,(n+1)$ dalās ar 3 kā triju pēc kārtas ņemtu veselu skaitļu reizinājums.

10.4. Atbilde: nē, nevar.



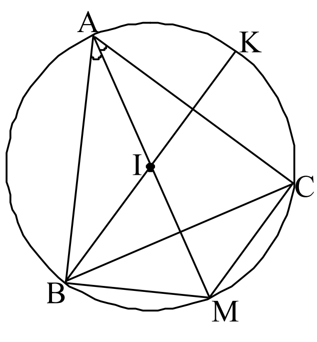
Otrais spēlētājs var domās sadalīt rūtiņas „ķieģeļu sienas" formā (skat. zīm.) un uz katru pirmā spēlētāja gājienu atbildēt ar gājienu tai pašā „ķieģelī". Tā kā katrs četru rūtiņu kvadrāts vienu „ķieģeli" satur pilnībā, tad tas saturēs arī vismaz vienu otrā spēlētāja nokrāsoto rūtiņu.

10.5. Nē. Sadalīsim karti 27 kubos ar izmēriem $2\times2\times2$ un izkrāsosim šos kubus „šaha galdiņa kārtībā". Varam uzskatīt, ka ir 13 melni kubi, tātad $13\cdot8=104$ melni kubiņi. Bet katrs klucītis satur 2 melnus kubiņus, tātad kopā jābūt vismaz $53\cdot2=106$ melniem kubiņiem.

11.1. Saskaņā ar nevienādību starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko

$$3a^8+5b^8=a^8+a^8+a^8+b^8+b^8+b^8+b^8+b^8\geq$$
$$\geq 8\cdot\sqrt[8]{\left(a^8\right)^3\cdot\left(b^8\right)^5}=8a^3b^5.$$

11.2.



Tā kā $\angle BAM=\angle CAM$, tad $\cup BM=\cup CM$. Vienādiem lokiem atbilst vienādas hordas, tāpēc $MB=MC$. Novelkam $\angle B$ bisektrisi. Lai pierādītu, ka $MB=MI$, pierādīsim, ka $\angle IBM=\angle BIM$. Tā ir, jo

a) $\angle IBM=\frac{1}{2}\left(\cup KC+\cup CM\right)$,

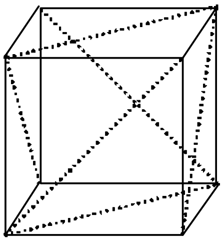
b) $\angle BIM = \frac{1}{2}(\cup AK + \cup BM)$,

c) $\cup KC = \cup AK$ un $\cup CM = \cup BM$.

11.3. Apzīmēsim $ab = \alpha^3$, $bc = \beta^3$, $ca = \gamma^3$, kur α, β, γ - naturāli skaitļi. Tad $a^2 = \frac{(ab)\cdot(ac)}{bc} = \frac{\alpha^3 \cdot \gamma^3}{\beta^3} = \left(\frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta}\right)^3$ ir racionāla skaitļa kubs. Tā kā a^2 pats ir naturāls skaitlis, tad $k = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta}$ ir naturāls skaitlis (ja *k* būtu nesaīsināma daļa ar saucēju >1, tad arī k^3 būtu nesaīsināma daļa ar saucēju >1). Tātad $a^2 = k^3, k \in N$. Tātad a^2 katru savu pirmreizinātāju satur ar kāpinātāju, kas dalās ar 3. Šis kāpinātājs ir 2 reizes lielāks par kāpinātāju, ar kuru attiecīgo pirmreizinātāju satur *a*. Tātad attiecīgais kāpinātājs skaitlī *a* dalās ar 3. No tā seko vajadzīgais par *a*. Apgalvojumu skaitļiem *b* un *c* pierāda līdzīgi.

11.4. Dabīgā veidā ieviešam jēdzienus „horizontāls gājiens" (*hg*) un „vertikāls gājiens" (*vg*). Katrs *vg* pirmās un trešās kolonnas summu maina par 0 vai par 2, katrs *hg* – par 1. Procesa beigās šī summa mainījusies par pāra skaitli (no pāra skaitļa uz pāra skaitli). Tāpēc izdarīts pāra skaits *hg*. Līdzīgi pierāda, ka izdarīts pāra skaits *vg*.

11.5. Atbilde: 4.



Piemēru ar 4 draudzībām skat. zīm.

Pieņemsim, ka draudzību skaits ≤ 3. Ja ir virsotne, no kuras iziet 3 diagonāles, tad tajā ir 3 draudzības; tāpēc no pārējām virsotnēm iziet ≤ 1 diagonāle no katras. Tad novilkto diagonāļu galapunktu skaits ir $\leq 7 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 10$ - pretruna. Ja virsotnes, no kuras iziet 3 diagonāles, nav, tad ir ≤ 3 virsotnes ar 2 diagonālēm katrā. Galapunktu skaits nepārsniedz $3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 11$ - pretruna.

12.1. Ievietojot $y = x^{-2}$ pirmajā vienādojumā, iegūtam $x^{x+x^{-2}} = x^{-2(x-x^{-2})}$.

Pastāv 2 iespējas:

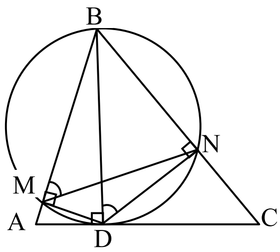
a) $x = 1$; tad no 2. vienādojuma $y = 1$. Pārbaude 1. vienādojumā rāda, ka šis atrisinājums der.

b) $x \neq 1$. Tad

$x + x^{-2} = -2(x - x^{-2})$ => $3x = x^{-2}$ => $3x^3 = 1$.

Tātad $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ un no 2. vienādojuma $y = \sqrt[3]{9}$. Pārbaude 1. vienādojumā rāda, ka šis atrisinājums der.

12.2. Tā kā $\angle BMD + \angle BND = 180°$, ap *MBND* var apvilkt riņķa līniju. Tāpēc $\angle BMN = \angle BDN$. Tātad $\angle AMN + \angle ACN = (180° - \angle BMN) + (90° - \angle NDC) = 180° - \angle BMN + \angle BDN = 180°$, no kā seko vajadzīgais.



12.3. Skaitļa $A = n^2 + 2008n$ vietā varam apskatīt $B = n^2 + 8n = (n+4)^2 - 16$. Tā kā B beidzas ar 4, tad $(n+4)^2$ beidzas ar 0; tāpēc $(n+4)^2$ beidzas ar 00 un B beidzas ar 84. Tātad A priekšpēdējais cipars ir 8.

12.4. Jā, var. Sauksim jau novietotos taisnstūrus par melniem. Sadalām plakni 2×2 rūtiņu lielos kvadrātos. Tad sākumā katrs kvadrāts satur 0, 1 vai 2 melnas rūtiņas.

- Ja kvadrātā nav melnu rūtiņu, tajā ievieto 2 taisnstūrus.
- Ja kvadrātā ir 2 melnas rūtiņas, tad tās atrodas blakus; kvadrātā var ievietot vēl 1 taisnstūri.
- Ja kvadrātā jau ir tieši 1 melna rūtiņa, apskatām šo kvadrātu un to blakus esošo, kurā ir atbilstošā taisnstūra otrā melnā rūtiņa; tad tā arī ir vienīgā šajā otrajā kvadrātā. Balto daļu šajos abos kvadrātos pārklājam, kā parādīts zīmējumā.

1			3
1	2	2	3

12.5. Katram zēnam piekārtosim to meiteņu kopu, kas viņam patīk. Tad visas šīs kopas ir dažādas. Tātad meiteņu kopas apakškopu nevar būt mazāk nekā zēnu. Kopai ar m elementiem ir 2^m apakškopu. Tāpēc $2^m \geq z$, k.b.j.